

Zadania z RP2. Seria 14. Łańcuchy Markowa.

Zad 1. (Model Ehrenfestów) W naczyniach I, II rozmieszczono losowo k cząstek. W chwili n losowo wybraną cząstkę przenosi się z naczynia w którym była do drugiego. Jaki jest rozkład stacjonarny.

Zad 2. Niech $S = \{1, \dots, m\}$, a P macierzą podwójnie stochastyczną, to znaczy $\sum_{i=1}^m p_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, m$. Udowodnić, że rozkład $\pi_i = \frac{1}{m}, i = 1, 2, \dots, m$ jest rozkładem stacjonarnym dla łańcucha Markowa z tą macierzą przejścia.

Zad 3. Niech (X_n) będzie łańcuchem okresowym o okresie d z rozkładem stacjonarnym π . Jeżeli $i \in S_l, j \in S_{(l+m) \pmod d}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(nd + m) = F_{ij} d \pi_j$

Zad 4. Rozważmy łańcuch Markowa z dwoma stanami i macierzą przejścia

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Oba stany są powracające, czy są zerowe?

Zad 5. W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany są zerowe lub wszystkie stany są dodatnie.

Zad 6. Dla nieprzywiedlnego łańcucha Markowa istnieje dokładnie jeden rozkład stacjonarny wtedy i tylko wtedy, gdy łańcuch jest powracający dodatni.

Zad 7. W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa stan powracający j jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 0$ dla dowolnego stanu i .

Zad 8. W grze planszowej (o stanach 1, 2, 3) macierz przejścia zadana jest wzorem

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ile średnio trzeba gier by przejść ze stanu 1 do stanu 2.

Zad 9. Pchła porusza się pomiędzy psem, kotem, człowiekiem i podłogą. Niezależnie od tego, gdzie jest teraz wybiera następane miejsce pobytu z równymi prawdopodobieństwami. Swoją drogę zaczyna od podłogi. Na psie i kocie może się pożywić, na podłodze głoduje, a na człowieku ginie.

1. Jaka jest średnia liczba posiłków pchły przed śmiercią?
2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pchła zginie na czczo?