Zadania z RP2. Seria 13. **Łańcuchy Markowa.**

Zad 1. Wykazać, że dla stanu chwilowego i po i zachodzi wzór

$$F_{ii} = \frac{P_i}{1 + P_i}.$$

Zad 2. Wykazać, że jeśli stan j jest powracający oraz $i \to j$, to $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) = \infty$.

Zad 3. Wykazać, że jeśli j jest stanem chwilowym, to $\sum_n p_{i,j}(n) < \infty$ dla dowolnego stanu i. W szczególności $\lim_n p_{ij}(n) = 0$.

Zad 4. Udowodnić, że dla skończonego łańcucha Markowa j jest stanem chwilowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest stanem nieistotnym.

Zad 5. Udowodnić, że zagadnieniu ruiny średni czas oczekiwania wynosi ab.

Zad 6. Udowodnić, że jeśli łańcuch Markowa jest powracający, to $F_{i,j} = 1$ dla każdych stanów i, j.

Zad 7. Niech łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ ma macierz przejścia postaci $p_{01} = p_0$, $p_{00} = 1 - p_0$, $p_{n,n+1} = p_n$, $p_{n,0} = 1 - p_n$. Kiedy ten łańcuch jest powracający, a kiedy chwilowy.

Zad 8. Czy łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\}$$

jest łańcuchem okresowym?

Zad 9. Udowodnić, że jeśli dla macierzy przejścia nieprzywiedlnego łańcucha Markowa istnieje j takie, że $p_{jj} > 0$, to łańcuch nie jest okresowy.

Zad 10. W pudełku A jest 6 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 6, w pudełku B ani jednej. Wykonano 100000 rzutów kostką i po każdym rzucie przekładano kule z wylosowanym numerem do drugiego pudełka. Jaka jest mniej więcej szansa, że pudełko B jest puste?

Zad 11. Znaleźć wszystkie rozkłady stacjonarne dla łańcucha Markowa o macierzy przejścia

$$P = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right\}$$

Zad 12. Udowodnić, że jeśli π jest rozkładem stacjonarnym oraz j nie jest stanem powracającym dodatnim, to $\pi_j = 0$.