Zadania z RP2. Seria 12. **Łańcuchy Markowa.**

Zad 1. Przypuśćmy, że macierz przejścia zadana jest wzorem

$$P = \left\{ \begin{array}{ccc} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 & 0,0 \end{array} \right\}$$

Znajdź rozkład stacjonarny dla tego łańcucha Markowa.

Zad 2. Pewien obywatel zamierza spędzić noc w następujących lokalach: Amnezja, Bezsens, Cela, Denko, i Entropia. Ma taki plan: start w Amnezji, a następnie wybór kolejnego miejsca drogą losowania:

1. z Amnezji od Bezsensu z pr. $\frac{1}{6}$, do Celi z pr. $\frac{5}{6}$;
2. z Bezsensu do Denka z pr. $\frac{1}{6}$, do Denka z pr. $\frac{1}{3}$, do Entropii z pr. $\frac{1}{2}$;
3. z Celi do Bezsensu z pr. $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, do Entropii z pr. $\frac{1}{2}$;
4. gdy trafi do Denka lub Entropii, pozostaje tam do końca.

Jak jest szansa na zakończenie eskapady w Entropii? Jak zmieni się odpowiedź przy zmianie punktu startowego.

Zad 3. Oblicz średni czas trwania eskapady opisanej w Zad. 2.

Zad 4. Niech U_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbf{P}(U_n = 1) = \mathbf{P}(U_n = -1) = \frac{1}{2}$. Czy (a) $X_n = U_n U_{n+1}$, (b) $Y_n = \frac{U_n + U_{n+1}}{2}$ są łańcuchami Markowa?

Zad 5. Niech U_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, $\varphi_n : S \times \mathbb{R} \to S$ będą funkcjami borelowskimi. Niech X_0 będzie zmienną losową o wartościach w S niezależną od U_n i niech

$$X_{n+1} := \varphi_n(X_n, U_n), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Wykazać, że (X_n) jest łańcuchem Markowa.

Zad 6. Niech X_n będzie błądzeniem przypadkowym na prostej z, $X_0 = 0$. Pokazać, że ciągi (Y_n), (Z_n) zdefiniowane wzorami

1. $Y_n = |X_n|$;
2. $Z_n = U_n - X_n$, gdzie $U_n = \max_{k \leqslant n} X_k$

są łańcuchami Markowa; znaleźć ich macierze przejścia.

Zad 7. Cząsteczka porusza się wzdłuż osi OX ze stałą prędkością $+v$ lub $-v$. W chwilach $1, 2, ...$ kierunek ruchu pozostaje bez mian z pr. p a z pr. $q = 1 - p$ zmienia się na przeciwny. Zmienna X_n opisuje kierunek ruchu w momencie n. Znaleźć $\mathbf{P}(X_n = +v | X_0 = -v)$, $\mathbf{P}(X_0 = +v | X_n = +v)$ oraz rozkład X_n, gdy wiemy, że $\mathbf{P}(X_0 = v) = r$.

Zad 8. Wiemy, że k kul białych i k kul czarnych umieszczono w dwóch pudełkach, po k kul w każdym. Stan ukladu opisany jest przez liczbę kul białych w 1 pudełku. Przejście pomiędzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli i zamieniamy miejscami. Znaleźć macierz przejścia dla takiego łańcucha Markowa. Jaki jest rozkład stacjonarny dla tego łańcucha.