Zadania z RP2. Seria 11. **Martyngały.**

Zad 1. Niech U_n będzie ciągiem Bernoulliego. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, U_2, ..., U_n)$ i niech

$$Z_n = e^{a(U_1+...+U_n)-(na^2/2)}$$

Udowodnić, że Z_n jest nadmartyngałem. Zbadać zbieżność ciągu Z_n p.n. i w L^1.

Zad 2. Korzystając z twierdzenia o zbieżności nadmartyngałów, wykazać, że jeśli ciąg zmiennych niezależnych spełnia warunki: $\mathbf{E}X_n = 0$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}X_n^2 < \infty$, to szereg $\sum_0^{\infty} X_n$ jest zbieżny p.n.

Zad 3. Udowodnić, że dla podmartyngału $(X_k)_{k=1}^n$ i dowolnego $r > 0$ zachodzi nierówność

$$r\mathbf{P}(\min_{k\leqslant n} X_k \leqslant -r) \leqslant \mathbf{E}(X_n 1_{\min_{k\leqslant n} X_k > -r}) - \mathbf{E}X_0 \leqslant \mathbf{E}X_n^+ - \mathbf{E}X_0.$$

Zad 4. Udowodnić, że dla podmartyngału $(X_k)_{k=1}^n$ i dowolnego $r > 0$ zachodzi nierówność

$$r\mathbf{P}(\max_{k\leqslant n} |X_k| \geqslant r) \leqslant 3 \max_{k\leqslant n} \mathbf{E}|X_k|$$

Zad 5. Wykazać, że dla nadmartyngału $(X_k)_{k=1}^n$ zachodzi nierowność

$$\mathbf{P}(\max_{k\leqslant n} |X_k| \geqslant r) \leqslant \frac{K}{r} \max_{k\leqslant n} \mathbf{E}|X_k|.$$

Zad 6. (Nierówność Dooba) Wykazać, że jeśli $(X_k)_{k=1}^n$ jest martyngałem, $p > 1$, to

$$\mathbf{E} \sup_{k\leqslant n} |X_k|^p \leqslant (\frac{p}{p-1})^p \mathbf{E}|X_n|^p.$$

Zad 7. Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mathbf{P}$ jest miarą Lebesgue'a, a f jest funkcją Borolowską całkowalną wg. miary Lebesgue'a. Rozważmy zstępujący ciąg podziałów odcinka $[0,1]$, $(x_j^n)_{j=1}^{k_n}$, $x_1^n = 0$, $x_{k_n}^n = 1$. Udowodnić, że

$$X_n(\omega) := \frac{1}{x_{j+1}^n - x_j^n} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} f(z)dz, \quad \text{dla} \ \ \omega \in [x_j^n, x_{j+1}^n).$$

jest zbieżny p.n. do f.