Zadania z RP2. Seria 10. **Martyngały.**

Zad 1. Niech $\xi_1, \xi_2, ...$ będzie ciągiem i.i.d., takim, że $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi = -1) = q$ $(p+q = 1, p, q > 0)$. Definiujemy $S_n = \xi_1 + ...\xi_n$. Przyjjmujemy, że gracze A i B mają odpowiednio kapitały początkowe a i b. Niech $c = a + b$. Momentem ruiny gracza A nazywamy m.z.

$$\tau_1 := \inf\{n : \ S_n = -a\}.$$

Momentem zakończenia gry nazywamy nasępujący m.z.

$$\tau_R := \inf\{n : \ S_n \in \{-a, b\}\}.$$

Oblicz prawdopodobieństwa ruiny $p_1 = \mathbf{P}(S_{\tau_R}) = -a$, $p_2 = \mathbf{P}(S_{\tau_R} = b)$.

Zad 2. Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny gracza A w przypadku gdy gracz B ma nieskończony kapitał.

Zad 3. Wyprowdzić tożsamość Walda z faktu, że $(S_n - n\mathbf{E}X_1, \sigma(X_1, ..., X_n)$ jest matyngałem.

Zad 4. Udowodnić nastepującą wersję tożsamości Walda. Jeśli $X_1, ..., X_n$ są i.i.d., $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$, $\mathbf{E}\tau < \infty$, to

$$\mathbf{E}(S_\tau - \tau\mathbf{E}X_1)^2 = \mathbf{E}\tau\mathbf{D}^2X_1.$$

Zad 5. Udowodnić, że zagadnieniu ruiny średni czas oczekiwania wynosi ab.

Zad 6. Pokazać, że w przypadku kapitału nieskończonego kapitału średni czas oczekiwania na ruinę dla gracza A wynosi $\frac{a}{q-p}$, $p < \frac{1}{2}$.

Zad 7. Pokazać, że w grze symetrycznej $p = \frac{1}{2}$ (kapitał nieskończony) średni czas oczekiwania na wygranie 1 wynosi ∞.

Zad 8. Niech Z_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i zerowej średniej, niech $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, ..., Z_n)$ i

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_{n-1}Z_n, \quad X_0 = Z_0.$$

Zad 9. Niech ξ_i będą ciągiem i.i.d. $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_i = -1) = q$, gdzie $p + q = 1$, $p, q > 0$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, ..., \xi_n)$ i $Z_n = (\frac{p}{q})^{\xi_1 + \dots + \xi_n}$. Wykazać, że $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

Zad 10. Wykazać, że przy opowiednich założeniach funkcja wypukła od martyngału jest podmatyngałem. Funkcja wypukła niemalejąca od podmartyngału jest podmartyngałem.

Zad 11. Ciąg $(X_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem. Zbadać (zakładając w razie czego odp. całkowalność), podnad martyngałami są

$$\text{a)} \ |X_n|^p, \ p \geqslant 1, \ \text{(b} \ \ (X_n \wedge a)_n, \ \text{(c} \ \ (X_n \vee a)_n.$$

Zad 12. Pokaż, że $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $X_0 = 0$ jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ograniczonego (wystrczy 2-punktowy) m.z. τ, $\mathbf{E}X_\tau = 0$.