Kolokwium z RP2 21.01.2006

Zad 1. Niech $a > 0$. Niech $X_1, X_2, ...$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o gęstości

$$g(x) := ax^{-2}1_{\{x>a\}}.$$

Do jakiego rozkładu zbiega ciąg zmiennych losowych

$$Y_n := \frac{1}{n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i.$$

Zad 2. Korzystając z CTG oblicz granicę

$$e^{-n} \sum_{0\leqslant k\leqslant n+t\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!},$$

gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Zad 3. Niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbf{P}(X = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Czy istnieje zmienna losowa Y niezależna od X taka, że $X + Y$ ma taki sam rozkład jak $2Y$.

Zad 4. Dany jest ciąg (X_n) zmiennych niezależnych o tym samym rozkładzie $\mathbf{P}(X_n = \frac{1}{2}) = \mathbf{P}(X_n = \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, ...$ Określamy zmienną losową τ wzorem

$$\tau = \inf\{n : \ X_1 ... X_n < \frac{1}{100}\}.$$

1. Udowodnić, że τ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$;
2. Udowodnić, że $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$;

Zad 5. Urna zawiera b_0 białych i c_0 czarnych kul $b_0, c_0 \geqslant 1$. Losujemy kulę z urny, zwracamy ją i dokładamy m kul tego samego koloru. Niech b_n, c_n oznaczają liczbę kul białych i czarnych po n tym losowaniu. Definiujemy $X_n = \frac{c_n}{b_n+c_n}$ jest to ułamek kul czarnych w urnie po n tym losowaniu i $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$, $n = 0, 1, 2, ...$ Udowodnij, że $(X_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem. Czy ten martyngał jest zbieżny p.n.? Czy jest zbieżny w L_1, jeśli tak, to jaka jest wartość oczekiwana granicy?

Zad 6. W Rurytani syn piekarza zostaje piekarzem z prawdopodobieństwem $3/4$ a syn nie piekarza z prawdopodobieństwem $1/100$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wnuk piekarza jest piekarzem? Jakie jest prawdopodobieństwo, że w potomek piekarza w n-tym pokoleniu jest piekarzem? Jaki procent ludzi w Rurytani jest piekarzami?