Zadania z PS2. Seria 9. **Równania stochastyczne.**

**Zad. 1** Ogólna postać rówananania liniowego. Niech $A(t)$ będzie macierzą $m \times m$, $\sigma(t)$ - macierzą $m \times d$ i $a(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0,T]$, $T < \infty$. Zakładamy, że $A, \sigma, a$ są ograniczone i ciągłe (wystarcza mierzalność). Niech $\xi$ będzie zmienną w $\mathbb{R}^m$ niezależną od $W$ - procesu Wienera w $\mathbb{R}^d$ Niech $\delta(t)$ będzie jedynym rozwiązaniem równania

$$\dot{\delta}(t) = A(t)\delta(t), \quad \delta(0) = I.$$

1. Pokaż, że $\xi(t) = \delta(t)(\xi + \int_0^t \delta^{-1}(s)a(s)ds)$ jest jedynym rozwiązaniem równania
$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + a(t), \quad \xi(0) = \xi.$$
2. Pokaż, że $X(t) = \delta(t)(\xi + \int_0^t \delta^{-1}(s)a(s)ds + \int_0^t \delta^{-1}(s)\sigma(s)dW_s)$ jest jedynym rozwiązaniem równania
$$dX_t = (A(t)X_t + a(t))dt + \sigma(t)dW_t, \quad X_0 = \xi.$$

**Zad. 2** Rozważmy równanie $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$, $X_0 = X$. Zakładamy, że

1. $b(x)$, $\sigma(x)$ są mierzalne, ograniczone na zbiorze ograniczonym;
2. $W$ proces Wienera w $\mathbb{R}^d$, $X_0 = x$, $X_t$ rowiązanie równania;
3. $D$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^d$, $x \in D$;
4. definiujemy moment zatrzymania $\tau = \inf\{t : \ X_t \neq D\}$

Definiujemy operator

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{j=1}^d b_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \varphi_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

gdzie $\varphi = \sigma\sigma^*$. Pokazać, że jeśli istnieje zbiór otwarty $D' \supset \overline{D}$, funkcja $f \geqslant 0$ klasy $C^2$ w $D'$ oraz liczba $c > 0$ taka, że $\mathcal{L}f \leqslant -c$ w $D$, to $\mathbf{E}\tau < \infty$.
*Wskazówka* Założyć, że $D$ jest ograniczony.

**Zad. 3** Niech spełnione będą założenia (1-4) z poprzedniego zadania. Jeśli istnieje $R$ takie, że $|y_1| < R$ dla każdego $y \in D$, $a_{11}(y)$ - ściśle oddzielone od 0 ($a_{11}(y) \geqslant \alpha > 0$) dla $y = (Y_1, ..., y_d)$, $b_1$ ograniczone w $D$, to $\mathbf{E}\tau < \infty$.
*Wskazówka* Rozważyć $f(y) = \cosh(rR) - \cosh(ry_1)$ dla odpowiedniego $r > 0$.

**Zad. 4** Rozważmy proces Wienera $W$ w $\mathbb{R}^2$. Niech zbiór $D$ będzie wyznaczony przez kąt o wartości $\alpha$ (przeciwnie do wskazówek zegara, jednym ramieniem jest półprosta $(0,0) \to (\infty, 0)$). Definiujemy proces $X_t = W_t + x$, $x \in D$. Pokaż, że

1. jeśli $\alpha < \frac{\pi}{2}$, to $\mathbf{E}\tau < \infty$ dla $x \in D$;
2. jeśli $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2}$, to $\mathbf{E}\tau = \infty$ dla $x \in D$.

*Wskazówka* Rozpatrzeć $f$ równe we współrzędnych beigunowych $(r, \varphi)$, $r^2 \sin(\rho(\alpha + \varepsilon - \varphi))$ dla $\rho, \varepsilon > 0$. Skorzystać ze wzoru na gęstość rozkładu czasu dojścia do punktu dla procesu Wienera w $\mathbb{R}$.