Zadania z PS2. Seria 8. **Wzór Ito.**

Zad. 1 Niech W będzie procesem Wienera w $\mathbb{R}^2$, $a \neq 0$. Pokazać, że z $\mathbf{P} = 1$ W dochodzi do każdego otoczenia a ale z $\mathbf{P} = 0$ do punktu a.

Wskazówka Rozważyć funkcję $h(x) = -\ln|x-a|$, τ_n- jak w przypadku $d > 2$.

Zad. 2 Sformułować i udowodnić charakteryzację procesu $W = (W_1, ..., W_d)$ w terminach martyngałów eksponencjalnych (analogiczną do jednowymiarowej - patrz notatki).

Zad. 3 Niech X będzie procesem prognozowalnym takim, że dla pewnego $m \geqslant 1$

$$\mathbf{E}\int_0^T X^{2m}(s)ds < \infty.$$

Rzecz jasna $X \in \mathcal{L}^2_T$. Niech $M = \int XdW$. Udowodnić, że

$$\mathbf{E}M_T^{2m} \leqslant (m(2m-1))^m T^{m-1}\mathbf{E}\int_0^T X_s^{2m} ds.$$

Wskazówka Wykorzystać wzór Ito, lokalizację i nierówność Holdera.

Zad. 4 Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{T,loc}$, $T \leqslant \infty$. Pokazać, że

1. Jeśli $\{\langle M\rangle_T < \infty\}$ p.n., to istnieje skończona granica $\lim_{t\to T} M_t$.
2. Jeśli $\{\langle M\rangle_T = \infty\}$ p.n., to $\limsup_{t\to T} M_t = \infty$, $\liminf_{t\to T} M_t = -\infty$.

Zad. $*$ Udowodnić nierówność Burkoldera, Davisa, Gundy'ego. Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, $M_0 = 0$. Pokazać, że dla każdego $p > 0$ istnieją stałe c_p, C_p takie, że

$$c_p\mathbf{E}\langle M\rangle_T^{p/2} \leqslant \mathbf{E}\sup_{t\leqslant T}|M_t|^p \leqslant C_p\mathbf{E}\langle M\rangle_T^{p/2}.$$