Zadania z PS2. Seria 7. **Wzór Ito.**

Zad. 1 Rozważmy proces Y zadany wzorem $Y(t) = e^{-\lambda t}W(\frac{e^{2\lambda t}}{2\lambda})$, gdzie W jest standardowym ruchem Browna. Ogólnie procesem O-U nazywamy $X_t = e^{-\lambda t}\xi + Y_t$, gdzie $\xi = \lim_{t\to\infty} Y_t$. Udowodnij, że

$$dX_t = -\lambda X_t dt + dW_t,$$

to znaczy $X_t = X_0 - \lambda \int_0^t X_s ds + W_t$.

Zad. 2 Niech $\lambda \in \mathbb{R}$, $Z_t^{(\lambda)} = e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}$. Pokazać, że

$$dZ^{(\lambda)} = \lambda Z_t^{(\lambda)} dW_t,$$

to znaczy $Z_t^{(\lambda)} = 1 + \int_0^t Z_s^{(\lambda)} dW_s$.

Zad. 3 Rozważmy funkcję $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ klasy C^2, zbiór $G \subset \mathbb{R}^d$- otwarty. Niech h będzie funkcją harmoniczną w G, a W procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$ startującym z 0. Niech $x \in G$, $\tau = \inf\{t: \ W_{t+x} \notin G\}$. Pokazać, że $h(W_{t\wedge\tau} + x)$ jest martyngałem.

Zad. 4 Niech W będzie procesem Wienera w $\mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$. Pokazać, że $X_t = \frac{1}{|W_t - a|}$ jest martyngałem lokalnym, ale nie jest martyngałem. W tym celu należy udowodnić:

- $h(x) = \frac{1}{|x-a|}$ jest harmoniczna;
- rozważyć ciąg m.z. $\tau_n = \inf\{t: \ |W_t - a| \geqslant \frac{1}{n}\}$

Zad. 5 Udowodnić wielowymiarową wersję twierdzenia Levy'ego. Niech $M_j(0) = 0$, $j = 1, 2, ..., d$. Proces $(M_1, ..., M_d)$ jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^d \Leftrightarrow \langle M_k, M_j \rangle = \delta_{k,j} t$, $k, j = 1, ..., d$