Zadania z PS2. Seria 6. **Całkowanie przez części.**

Zad. 1 Martyngał lokalny, który nie jest martngałem.

1. Pokaż, że martyngał lokalny $\geqslant 0$ jest nadmartyngałem.
2. Zauważ, że proces $M_t = \frac{1}{|W_t - a|}$ dla $a \neq 0$ jest martyngałem lokalnym, ale nie martyngałem.

Zad. 2 Niech $Z \in \mathcal{M}^{2,c}$, $X \in \Lambda^2_T(Z)$. Definiujemy $M = \int XdZ$. Pokaż, że dla każdego Y lokalnie ograniczonego (to znaczy istnieje ciąg $\tau_n \nearrow T$ taki, że $Y^{\tau_n} - Y_0$ jest ograniczony) dostajemy równość

$$\int YdM = \int XYdZ.$$

Wskazówka Zdefiniować moment zatrzymania

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & |Y_0| > n \\ T & |Y_0| \leqslant n \end{cases}$$

Zad. 3 Obliczyć $\int_0^t W_s^2 dW_s$.

Zad. 4 Znaleźć rozkłady skończenie wymiarowe procesu $Y_t = \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$, gdzie $\alpha > 0$.

1. Pokaż, że Y_t są zbieżne wg. rozkładu, gdy $t \to \infty$
2. Niech ξ będzie zmienną losową zdefiniowaną w punkcie 2 (granica procesu Y_t). Pokaż, że proces

$$e^{-\alpha t}\xi + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$

jest procesem stacjonarnym i znaleźć jego rozkłady skończenie wymiarowe.

Zad. 5 Definujemy wielowymiarowy proces Wienera (o wartościach w $\mathbb{R}^d$) $W = (W_1, ..., W_d)$, gdzie $d \in \mathbb{N}$, a procesy W_i są niezależne. Definujemy filtrację $\mathcal{F}_t = \overline{F_t^W}$ - uzupełnienie filtracji pochodzącej od procesu. Pokazać, że $\langle W_i, W_j \rangle(t) = \delta_{i,j} t$ to znaczy t kiedy $i = j$ i 0 kiedy $i \neq j$.