Zadania z PS2. Seria 5. **Proces wariacji kwadratowej.**

Zad. 1 Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, a $\langle M \rangle$ będzie procesem rosnącym takim, że $\langle M \rangle_0 = 0$, $M^2 - \langle M \rangle$ jest martyngałem. Wówczas

1. $\langle M \rangle$ jest jednoznacznie wyznaczony;
2. dla dowolnego τ $\langle M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau$

Zad. 2 Niech $A_k \in \mathcal{F}_k$, $n, k = 1, 2, ...$, $A_k \nearrow \Omega$, $1_{A_k}\xi_n$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa. Wówczas (ξ_n) musi być zbieżny wedłu prawdopodobieństwa.

Zad. 3 Niech $\xi_n \geqslant 0$ będą zmiennymi losowymi takimi, że $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi$. Pokaż, że $\xi_n \to \xi$ w $L^1(\Omega)$.

Zad. 4 Niech $M, M' \in \mathcal{M}^{2,c}$, $M_0 = 0 = M'_0$. Udowodnij, że

$$\mathbf{E}|V_n(M,t) - V_n(M',t)| \leqslant \|M - M'\|^2 + 2\|M\|\|M - M'\|$$

Zad. 5 Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $X \in \Lambda^2_T(M)$, τ-moment zatrzymania. Pokaż, że $X \in \Lambda^2_T(M^\tau)$ (tzn. $\int_0^t X_s^2 d\langle M^\tau \rangle < \infty$ p.n.) oraz

$$\int X dM^\tau = (\int X dM)^\tau.$$