Zadania z PS2. Seria 4. **Zatrzymywanie całki stochastycznej.**

Zad. 1 Niech τ będzie momentem stopu takim, że $\mathbf{E}\tau < \infty$. Pokaż, że $1_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}^2_{[0,\infty]}$ oraz $W_\tau = \int_0^\infty 1_{[0,\tau]}(s)dW_s$. Udowodnij wzory $\mathbf{E}W_\tau = 0$, $\mathbf{E}W_\tau^2 = \mathbf{E}\tau$.

Zad. 2 Niech $\alpha, \beta > 0$, $\tau = \inf\{t : |W_t| = \alpha\sqrt{\beta + t}\}$. Pokazać, że $\mathbf{E}\tau < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha < 1$. Jeśli $\mathbf{E}\tau < \infty$, to $\mathbf{E}\tau = \frac{\alpha^2\beta}{1-\alpha^2}$

Zad. 3 Niech M będzie procesem adaptowalnym prawostronnie ciągłym $M_0 = 0$, $\mathbf{E}|M_t| < \infty$ dla $t \leqslant T$. Udowodnij, że M jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy dla kazdego moementu stopu τ ograniczonego, $\mathbf{E}M_\tau = 0$.

Zad. 4 Niech $X \in \Lambda^2_T$, $t_1 < t_2 \leqslant T$. Dla dowolnej zmiennej losowej ξ $\mathcal{F}_{t_1}$-mierzalną zachodzi $\xi 1_{(t_1,t_2]} \in \Lambda^2_T$ i $\int_{t_1}^{t_2} \xi X dW = \xi \int_{t_1}^{t_2} X dW$.