Zadania z PS2. Seria 3. **Miary stochastyczne.**

Zad. 1 Pokaż, że jeśli X jest przestrzenią liniowo-topologiczną, która ma przeliczalną bazę otoczeń zera, to istnieje funkcja $\|\cdot\|$ taka, że

1. $x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|x\| = 0$;
2. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;
3. $\|\alpha x\| \leqslant \|x\|$ dla $|\alpha| \leqslant 1$.

W szczególności $d(x,y) = \|x-y\|$ zadaje metrykę niezmienniczą na X. Pokaż, że jeśli topologia X jest zadana przez pewną metrykę niezmienniczą, to X ma przeliczalną bazę otoczeń zera.

Definicja 1 *Przestrzeń X nazywamy F-przestrzenią jeśli jest zupełna względem pewnej metryki niezmienniczej.*

Zad. 2 Pokaż, że jeśli d_1, d_2 są metrykami niezmienniczymi na przestrzeni liniowej X, to d_1 jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy d_2 jest zupełna.

Definicja 2 *Zbiór E nazywamy ograniczonym w X wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego otoczenia zera U istnieje $t < \infty$ takie, że $E \subset tU$. Przestrzeń X nazywamy quasi-Banacha jeśli jest F-przestrzenią która ma ograniczone otoczenie zera.*

Zad. (∗) Udowodnij, że X jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy jest lokalnie wypukłą przestrzenią quasi-Banacha.

Zad. 3 Pokaż, że

1. $L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ jest F-przestrzenią;
2. $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ jest przestrzenią quasi-Banacha dla $0 < p < 1$;
3. $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ jest przestrzenią Banacha dla $p \geqslant 1$.

Zad. 4 Niech $\mathcal{F}$ będzie pewnym σ-ciałem. Pokaż, że funkcja $A \to 1_A$ jest miarą stochastyczną.

Zad. 5 Niech f będzie funkcją typu cadlag (lewostronne granice, prawostronna ciągłość), która ma wahanie skończone oraz $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Udowodnij, że istnieje borelowska miara rzeczywista μ na $\mathbb{R}$ taka, że

$$\mu((-\infty, x]) = f(x) \;\text{ oraz }\; V_f(x) = |\mu|((-\infty, x]).$$

Zauważ, że $|\mu|$ jest miarą kontrolną dla μ.

Zad. 6 Niech X_t, $t \in \mathbb{R}_+$ będzie procesem cadlag (lewostronne granice, prawostronna ciągłość), którego trajektorie mają p.n. wahanie skończone. Pokaż, że funkcja addytywna, zadana wzorem $\bar{m}([0,t]) = X_t$ rozszerza się do miary stochastycznej (o wartościach w $L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$).

Zad. 7 Jeśli $(M_t)_{t\in[0,T]}$ jest martyngałem ciągłym, całkowalnym z kwadratem, wówczas funkcja addytywna zadana wzorem $\bar{m}([0,t]) = M_t$ roszszerza się do miary stochastycznej o wartościach w $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Zad. 8 Udowodnij, że dla każdej $f \in L^2[0,T]$ zachodzi równość $\int_0^t f(s) dW_s = \int_0^t f(s) m_W(ds)$. To znaczy całka Ito jest całką wzlędem miary stochastycznej dla procesu Wienera.