Zadania z RP2. Seria 13. **Twierdzenie Girsanowa.**

Zad 1. Niech μ będzie miarą Wienera na $C[0,1]$. Dla dowolnego $h \in C[0,1]$ definiujemy $\mu_h(\cdot) = \mu(\cdot + h)$. Pokazać, że jeśli $h(t) = \int_0^t g(s)ds$ dla pewnego $g \in L^2[0,1]$, to μ_h jest aboslutnie ciągła wg. μ i znaleźć gęstość.

Zad $*$. Jeśli $h \in C[0,1]$ nie ma postaci z Zad 1., to μ_h i μ są singularne wzajemnie.

Zad 2. (Całka Stratonowicza). Niech $Z = Z_0 + M + A$, $Y = Y_0 + N + B$ -ciągłe semimartyngały, $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, $A, B \in \mathcal{V}$. Definiujemy

$$\int_0^t Y_s \circ dZ_s = \int_0^t Y_s dZ_s + \frac{1}{2}\langle M, N\rangle.$$

Udowodnij, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^3, to

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s) \circ dZ_s.$$

Zad 3. Niech Y, Z będą jak wyżej. Pokazać, że jeśli dla każdego ciągu podziałów normalnych

$$0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \ldots < t_{m_n,n} = t, \quad \lim_{n\to\infty} \max_j (t_{j+1,n} - t_{j,n}) = 0.$$

Pokaż, że

$$\sum_{j=0}^{m_n-1} \frac{1}{2}(Y_{t_{j,n}} + Y_{t_{j+1,n}})(Z_{t_{j+1,n}} - Z_{t_{j,n}}) \to \int_0^t Y \circ dZ_s.$$

Zad 4. Pokaż, że jeśli P jest rozwiązaniem problemu martyngałowego (x, a, b), to

$$N_t = Z_t - x - \int_0^t b(s, Z_s)ds$$

jest martyngałem takim, że

$$\langle N\rangle_t = \int_0^t a(s, Z_s)ds.$$