Zadania z PS2. Seria 12. **Procesy Levy'ego**

Zad. 1 Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Procesem Levy'ego nazywamy proces X określony na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ i wartościach w $\mathbb{R}^d$ który spełnia dwa warunki

1. (niezależność przyrostów) przyrost $X_{s+t} - X_t$ jest niezależny od procesu $(X_u,\ 0 \leqslant u \leqslant t)$

2. (jednorodność przyrostów) rozkład $X_{s+t} - X_t$ jest taki sam jak zmiennej X_s.

Pokaż, że zmienna X_1 jest nieskończenie podzielna. (To znaczy dla dowolnego N, istnieją $Y_1, ..., Y_N$ i.i.d. takie, że $X_1 = Y_1 + ... + Y_N$). Pokaż, że funkcja charakterystyczna X_t jest postaci

$$\mathbf{E} \exp(i\langle\lambda, X_t\rangle) = \exp(-t\Psi(\lambda)),$$

gdzie funkcję $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ nazywamy wykładnikiem charakterystycznym.

Zad. 2 Pokaż, że procesy Levy'ego o tym samym wykładniku charakterystycznym mają identyczne rozkłady skończenie wymiarowe. Znajdź proces którego wykładnik charakterystyczny jest równy $\Psi(\lambda) = c(1 - e^{i\lambda})$ $(d = 1)$, oraz $\Psi(\lambda) = \frac{1}{2}|\lambda|^2$ (d-dowolne).

Zad $*$ (Formuła Levy'ego-Chinczyna). Funkcja $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ jest wykładnikiem charakterystycznym rozkładu nieskończenie podzielnego na $\mathbb{R}^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $a \in \mathbb{R}^d$, Q forma kwadratowa dodatnio określona na $\mathbb{R}^d$ oraz miara Π na $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ spełniająca warunek $\int (1 \wedge |x|^2)\Pi(dx) < \infty$ taka, że

$$\Psi(\lambda) = i\langle a, \lambda\rangle + \frac{1}{2}Q(\lambda) + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i\langle\lambda,x\rangle} + i\langle\lambda, x\rangle 1_{|x|<1})\Pi(dx),$$

dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Macierz Q nazywa się współczynnikiem gaussowskim, miarę Π miarą Levy'ego.

Zad. 3 Niech $\xi_1, \xi_2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi o tym samym rozkładzie ν na $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Definiujemy $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Niech N będzie procesem Poissona z parametrem $c > 0$ niezależnym od ξ_i. Pokaż, że

$$e(t) = \begin{cases} \xi_n & \text{jeśli } N_{t-} < n = N_t \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

jest punktowym procesem Poissona o mierze charakterystycznej $c\nu$, gdzie 0 jest punktem izolowanym Υ. Proces

$$S_{N_t} = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i = \sum_{0 \leqslant s \leqslant t} e(s)$$

nazywamy złożonym procesem Poissona (o mierze charakterystycznej $c\nu$). Stosując formułę wykładniczą (Seria 11) pokaż, że wykładnik charakterystyczny złożonego procesu Poissona jest równy

$$\Psi(\lambda) = c\int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i\langle\lambda,x\rangle})\nu(dx).$$

W szczególności można napisać

$$\Psi(\lambda) = -ic\int_{\mathbb{R}^d} \langle\lambda, x\rangle 1_{|x|<1}\nu(dx) + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i\langle\lambda,x\rangle} + ic\langle\lambda, x\rangle 1_{|x|<1})c\nu(dx),$$

co oznacza, że $c\nu$ jest miarą Levy'ego tego procesu.

Zad. 4 Szczególnym przykładem procesów Levy'ego są procesy α-stabilne $\alpha \in (0, 2]$, to znaczy procesy których wykładnik charakterystyczny spełnia relacje $\Psi(k\lambda) = k^\alpha\Psi(\lambda)$ dla każdego $k > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Udowodnij, że proces $k^{-1/\alpha}X_{kt}$ ma ten sam rozkład co X_t (rozkłady skończenie wymiarowe). Niech $\alpha \neq 2$. Pokaż, że miara Levy'ego Π (we współrzędnych sferycznych (r, ϑ)) procesu X ma następującą postać

$$\Pi(dr, d\vartheta) = r^{-\alpha-d} dr \nu(d\vartheta),$$

gdzie ν jest pewną miarą skończoną na S^{d-1}. Z założenia $\int(1 \wedge |x|^2)\Pi(dx) < \infty$, wywnioskuj stąd, że $0 < \alpha \leqslant 2$.

Głównym celem zadań Serii 12 jest następujący rezultat.

Twierdzenie 1 *Niech $a \in \mathbb{R}^d$, Q będzie dodatnio określoną formą kwadratową na $\mathbb{R}^d$, Π miarą na $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ taką, że $\int(1 \wedge |x|^2)\Pi(dx) < \infty$. Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}^d$ definiujemy*

$$\Psi(\lambda) := i\langle a, \lambda \rangle + \frac{1}{2}Q(\lambda) + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i\langle \lambda, x\rangle} + i\langle \lambda, x \rangle 1_{|x|<1})\Pi(dx).$$

Wówczas istnieje proces Levy'ego X, którego Φ jest wykładnikiem charakterystycznym. Co więcej proces skoków $\triangle X = (\triangle X_t,\ t \geqslant 0)$ ($\triangle X_t = X_t - X_{t-}$) jest punktowym procesem Poissona, którego miara charakterystyczna jest równa Π. Miarę Π nazywa się miarą Levy'ego.

W istocie pokażemy więcej. Udowodnimy, że proces Levy'ego X da się skonstruować z trzech niezależnych procesów X^1, X^2, X^3, gdzie X^1 jest pewnym procesem Gaussowskim (ciągłym!), X^2 jest złożonym procesem Poissona (o skokach co najmniej 1), a X^3 punktowym procesem Poissona (o skokach mniejszych od 1), gdzie $E = \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, $\Upsilon = 0$.

Zad. 5 Niech W_t będzie d-wymiarowym procesem Wienera, $\triangle = (\triangle_t,\ t \geqslant 0)$ niezależnym procesem punktowym procesem Poissona o mierze charakterystycznej Π. Niech B będzie macierzą taką, że $Q(\lambda) = \langle B\lambda, B\lambda \rangle$. Pokaż, że proces $X^1_t = BW_t - at$ jest procesem Levy'ego o wykładniku charakterystycznym

$$\Psi^1(\lambda) = i\langle a, \lambda \rangle + \frac{1}{2}Q(\lambda).$$

Zad. 6 Rozważmy proces

$$\triangle^2_t = \begin{cases} \triangle_t & \text{jeśli } |\triangle_t| \geqslant 1 \\ 0 & w.p.p. \end{cases}$$

Pokaż, że $\triangle^2$ jest punktowym procesem Poissona o mierze charakterystycznej $\Pi^2(dx) = 1_{|x|\geqslant 1}\Pi(dx)$. Pokaż, że proces $X^2_t = \sum_{s \leqslant t} \triangle^2_s$, $t \geqslant 0$ jest złożonym procesem Poissona. Stosując formułę wykładniczą (Seria 11) udowodnij, że

$$\Psi^2(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i\langle \lambda, x \rangle}) 1_{|x|\geqslant 1} \Pi(dx).$$

Zad. 8 Definiujemy następujący proces

$$\triangle^3_t = \begin{cases} \triangle_t & \text{jeśli } |\triangle_t| < 1 \\ 0 & w.p.p. \end{cases}$$

Korzystając z faktu, że procesy Poissona, które nie skaczą jednocześnie są niezależne (Seria 11) udowodnij, że $\triangle^2$ i $\triangle^3$ są niezależne.

Zad. 9 Niech $\varepsilon > 0$. Definiujemy procesy sum skompensowanych

$$X^{\varepsilon,3}_t = \sum_{s \leqslant t} 1_{\varepsilon < |\triangle_s| < 1} \triangle_s - t\int_{\mathbb{R}^d} x 1_{\varepsilon < |x| < 1} \Pi(dx), \quad t \geqslant 0.$$

Pokaż, że $X^{\varepsilon,3}$ jest procesem Levy'ego o wykładniku charakterystycznym

$$\Psi^{\varepsilon,3}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i\langle \lambda, x\rangle} + \langle \lambda, x\rangle) 1_{\varepsilon<|x|<1} \Pi(dx).$$

Zad. 10 Zauważ, że nierówność maksymalna dla sum skompensowanych (Seria 11) implikuje, że dla $0 < \eta < \varepsilon$

$$\mathbf{E}(\sup_{s\leqslant t} |X_s^{\eta,3} - X_t^{\varepsilon,3}|^2) \leqslant 4t \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 1_{\eta<|x|<\varepsilon} \Pi(dx).$$

Korzystając z tego faktu, pokaż, że $X^{\varepsilon,3}$ zbiega do granicy X^3 w sensie normy

$$\|Y\| = \mathbf{E}(\sup_{s\leqslant t} |Y_s|^2)^{1/2}.$$

Zauważ, że X^3 jest procesem Levy'ego o wykładniku charakterystycznym

$$\Psi^3(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i\langle \lambda, x\rangle} + \langle \lambda, x\rangle) 1_{|x|<1} \Pi(dx).$$

Zad. 11 Zauważ, że X^3 jest niezależne od X^2 (bo X^3 jest mierzalne względem σ-ciała generowanego przez $\triangle^3$). Pokaż, że proces $X = X^1 + X^2 + X^3$ jest procesem Levy'ego o zadanym wykładniku charakterystycznym $\Psi = \Psi^1 + \Psi^2 + \Psi^3$.

Zad. 12 Zauważ, że rozkład procesu Levy'ego X o zadanym wykładniku charakterystycznym na proces proces gaussowski, złożony proces Poissona o skokach co najmniej 1 oraz punktowy proces Poissona o skokach mniejszych niż 1 jest jednoznaczny.