Zadania z PS2. Seria 11. **Procesy Levy'ego.**

Proces Poissona

Zad. 1 Niech $\tau_1, ..., \tau_n$ będzie ciągiem zmiennych niezależnych o rozkładzie wykładniczym z parametrem c. Znajdź rozkład $S_m = \tau_1 + ... + \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$. Znajdź rozkład $N_t := \sup\{n \in \mathbb{N} : \ S_n \leqslant t\}$. Proces N_t nazywamy procesem Poissona z parametrem c.

Zad. 2 Oblicz funkcję charakterystyczną N_t. Pokaż, że N_t ma własność braku pamięci. To znaczy dla $0 \leqslant s \leqslant t$ przyrost $N_{t+s} - N_s$ ma rozkład Poissona z parametrem cs i jest niezależny od $\sigma(N_u : \ u \leqslant s)$.

Zad. 3 Niech N_t będzie procesem Poissona z parametrem c (względem filtracji naturalnej $\mathcal{F}_t$). Niech H będzie procesem prognozowalnym.

1. Załóżmy, że $\mathbf{E}(\int_0^t |H_s| ds) < \infty$, dla $t \geqslant 0$. Pokazać, że następująca *całka skompensowana* jest martyngałem (wg. $\mathcal{F}_t$)
$$M_t = \int_0^t H_s dN_s - c\int_0^t H_s ds.$$

2. Załóżmy, że $\mathbf{E}(\int_0^t H_s^2 ds) < \infty$, dla $t \geqslant 0$. Pokazać, że
$$M_t^2 - c\int_0^t H_s^2 ds, \ \ \text{dla } t \geqslant 0$$
jest martyngałem wg $\mathcal{F}_t$.

3. Załóżmy, że H jest ograniczony, wówczas martyngałem jest
$$\exp(\int_0^t H_s dN_s + c\int_0^t (1 - e^{H_s}) ds), \ \ \text{dla } t \geqslant 0.$$

Zad. 4 Niech $N^{(i)}$, $i = 1, 2, ..., d$ będą procesami Poissona (wg. $\mathcal{F}_t$). Pokazać, że są one niezależne wtedy i tylko wtedy jeśli nigdy nie skaczą jednocześnie. To znaczy z $\mathbf{P} = 1$ dla dowolnych $i \neq j$
$$N_t^{(i)} - N_{t-}^{(i)} = 0 \ \text{ lub } \ N_t^{(j)} - N_{t-}^{(j)} = 0, \ \ \text{dla } t > 0.$$

Punktowy proces Poissona

Zad. 5 Niech E będzie przestrzenią polską, ν miarą σ-skończoną na E. Miarą Poissonowską nazywamy miarę losową $\varphi : \mathcal{B}(E) \to L_0(E)$ (przypisującą zbiorom borelowskim, zmienne losowe - patrz wykład!), spełniającą dwa warunki:

1. Dla każdego $B \subset E$ takiego, że $\nu(B) < \infty$ zmienna losowa $\varphi(B)$ ma rozkład Poissona z parametrem $\nu(B)$.

2. Dla dowolnych zbiorów rozłącznych $B_1, ..., B_n$ zmienne $\varphi(B_1), ..., \varphi(B_n)$ są niezależne

Miarę ν nazywamy miarą intensywności. Niech $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\nu = c|\cdot|$, gdzie $|\cdot|$ jest miarą Lebesgue'a. Pokaż, że funkcja zadana na π-układzie w $\mathbb{R}_+$ wzorem $\varphi((s,t]) := N_t - N_s$, $s < t$ rozszerza się do miary Poissonowskiej.

Zad. 6 Niech E będzie przestrzenią polską, ν miarą dodatnią, skończoną na E, $c = \nu(E)$. Niech $\xi_1, \xi_2, ...$ będzie ciągiem zmiennych niezależnych o tym samym rozkładzie $c^{-1}\nu$, N zmienną losową Poissona niezależną od $\xi_1, \xi_2, ...$ Pokazać, że

$$\varphi := \sum_{i=1}^{N} \delta_{\xi_i}.$$

zadaje miarę Poissonowską na E o intensywności ν. Jeśli ν jest σ-skończona, to miarę φ można skonstruować biorąc rozbicie E na zbiory E_n takie, że $\nu(E_n) < \infty$. Pokaż, że $\varphi = \sum_n \varphi_n$, gdzie φ_n odpowiada mierze intensywność $1_{E_n}\nu$.

Zad. 7 Rozważmy przestrzeń produktową $E \times [0, \infty)$ z miarą $\mu = \nu \otimes |\cdot|$. Niech φ będzie miarą Poissonowską φ o intensywności μ. Pokaż, że $\varphi(E \times \{t\}) \in \{0, 1\}$, $t \geqslant 0$. To pozwala wyreprezentować φ jako proces stochastyczny o wartościach w $E \cup \{\Upsilon\}$, gdzie Υ jest izolowanym punktem dodatkowym. Jeśli $\varphi(E \times \{t\}) = 0$ kładziemy $e(t) = \Upsilon$, jeśli $\varphi(E \times \{t\}) = 1$, to obcięcie φ do $E \times \{t\}$ jest równe $\delta_{(\epsilon,t)}$ (dla pewnego $\epsilon \in E$), kładziemy $e(t) = \epsilon$. Pokaż, że miara Poissonowska spełnia równość

$$\varphi = \sum_{t \geqslant 0} \delta_{(e(t),t)}.$$

Proces $e = (e(t), t \geqslant 0)$ nazywamy punktowym procesem Poissona z miarą charakterystyczną ν.

Zad. 8 Dla każdego zbioru $B \in \mathcal{B}(E)$ proces

$$N_t^B := |\{s \leqslant t : \ e(s) \in B\}| = \varphi(B \times [0, t]), \ \ t \geqslant 0$$

nazywamy procesem liczącym w B. Pokaż, że jest to proces Poissona z parametrem $\nu(B)$. Na odwrót przypuśćmy, że $e = (e(t), t \geqslant 0)$ jest procesem o wartościach w $E \cup \{\Upsilon\}$ takim, że proces liczący $N_t^B = |s \leqslant t : \ e(s) \in B|$ jest procesem Poissona z intensywnością $\nu(B)$. Pokaż, że procesy liczące N^{B_1},...,N^{B_n} nigdy nie skaczą wspólnie, jeśli $B_1, ..., B_n$ są rozłączne, a zatem na mocy Zad. 4, są niezależnymi procesami Poissona. Wywnioskuj stąd, że $\varphi = \sum_{t \geqslant 0} \delta_{(e(t),t)}$ jest miarą Poissona z intensywnością μ.

Zad. 9 Niech e będzie punktowym procesem Poissona. Niech B będzie zbiorem borelowskim takim, że $0 < \nu(B) < \infty$. Pokazać, że czas pierwszego dojścia e do B, $T_B := \inf\{t \geqslant 0 : \ e(t) \in B\}$ jest m.z., a ponadto

1. T_B ma rozkład wykładniczy z parametrem $\nu(B)$.
2. zmienna losowa $e(T_B)$ jest niezależna od T_B i ma rozkład $\nu(\cdot|B)$ to znaczy dla każdego $A \in \mathcal{B}(E)$

$$\mathbf{P}(e(T_B) \in A) = \frac{\nu(A \cap B)}{\nu(B)}.$$

3. proces e' zadany wzorem $e'(t) = \Upsilon$ jeśli $e(t) \in B$ oraz $e'(t) = e(t)$ jeśli $e(t) \ni B$ jest punktowym procesem Poissona o mierze charakterystycznej $1_{B^c}\nu$ niezależnym od $T_B, e(T_B)$.

Proces $(e(t), 0 \leqslant t \leqslant T_B)$ jest nazywany procesem zatrzymanym przy pierwszej wizycie w B.

Zad. 10 (Formuła kompensacyjna). Niech H będzie procesem prognozowalnym o wartościach w dodatnich, mierzalnych funkcjach na $E \cup \{\Upsilon\}$ takim, że $H_t(\Upsilon) = 0$ dla $t \geqslant 0$. Pokaż, że

$$\mathbf{E}(\sum_{t \geqslant 0} H_t(e(t))) = \mathbf{E}(\int_0^\infty \int_E H_t(x)\nu(dx)dt).$$

Zad. 11 (Formuła wykładnicza). Niech f będzie zespoloną funkcją Borelowską, na $E \cup \{\Upsilon\}$ taką, że $f(\Upsilon) = 0$ oraz

$$\int_E |1 - e^{f(x)}|\nu(dx) < \infty.$$

Wówczas dla każdego $t \geqslant 0$

$$\mathbf{E}(\exp(\sum_{0 \leqslant s \leqslant t} f(e(s)))) = \exp(-t \int_E (1 - e^{f(x)})\nu(dx)).$$

Zad. 12 (Nierówność maksymalna dla skompensowanych sum). Niech f będzie funkcją Borelowską na $E \cup \{\Upsilon\}$ taką, że $f(\Upsilon) = 0$. Dla każdego $T > 0$

$$\mathbf{E} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} (|\sum_{0 \leqslant s \leqslant t} f(e(s)) - t \int_E f(x)\nu(dx)|^2) \leqslant 4T \int_E f^2(x)\nu(dx).$$