Zadania z PS2. Seria 10. **Równania stochastyczne**

Zad. 1 Pokaż, że jeśli X_1, X_2 są rozwiązaniami równań

$$X_1(t) = \xi_1 + \int_s^t b(X_1(u))du + \int_s^t \sigma(X_1(u))dW(u), \quad X_1(s) = \xi_1;$$
$$X_2(t) = \xi_2 + \int_s^t b(X_2(u))du + \int_s^t \sigma(X_2(u))dW(u), \quad X_2(s) = \xi_2.$$

to

$$\mathbf{E}|X_1(t) - X_2(t)|^2 \leqslant 3\mathbf{E}|\xi_1 - \xi_2|^2 \exp(3K^2[(t-s) + (t-s)^2]),$$

gdzie K jest stałą Lipschitza dla b i σ.

Zad. 2 Niech $(X_t, \mathbf{P}_x)$ będzie rodziną Markowa. Przypuśćmy, że istnieją stałe T, $\delta > 0$ takie, że dla każdego $x \in D$ mamy $\mathbf{P}_x(\tau < T) > \delta$. Wtedy dla każdego x

$$\mathbf{P}_x(\tau \geqslant nT) \leqslant (1-\delta)^n,$$

$n = 0, 1, 2, ...$ oraz $\mathbf{E}_x\tau \leqslant \frac{T}{\delta}$.

Zad. $*$ Niech $(X_t, \mathbf{P}_x)$ będzie fellerowską rodziną Markowa o prawostronnie ciągłych trajektoriach. Jeżeli D jest zbiorem zwartym i $\mathbf{P}_x(\tau < \infty) > 0$ dla każdego $x \in D$, to spełnione są założenia zadania 2 i $\mathbf{E}_x\tau$ jest skończone i ograniczone.

Zad. 3 Niech D będzie zbiorem ograniczonym, τ- momentem wyjścia z D. Załóżmy, że $\mathbf{E}_x\tau < \infty$ dla $x \in D$. Załóżmy, że g jest ciągła w D, φ ciągła w ∂D. Przypuśćmy, że funkcja v spełnia równanie

$$\begin{cases} Lv(x) = -g(x) & x \in D \\ v(x) = \varphi(x) & x \in \partial D \end{cases}$$

Niech ponadto v przedłuża się w klasie C^2 na otwarty zbiór $D' \supset \overline{D}$. Wówczas

$$v(x) = \mathbf{E}_x(\varphi(X_\tau) + \int_0^\tau g(X_\tau)dt).$$

Zad. 4 Niech $(W_t, \mathbf{P}_x)$ będzie rodziną Markowa jednowymiarowych procesów Wienera i niech τ będzie- momentem pierwszego wyjścia procesu W_t z przedziału $[a, b]$. Wykazać, że

$$\mathbf{P}_x(W_\tau = b) = \frac{x-a}{b-a}, \quad \mathbf{E}_x\tau = (b-x)(x-a).$$

Zad. 5 Rozpatrujemy proces dyfuzji w $\mathbb{R}$ o współczynniku dyfuzji $\sigma^2(x) > \alpha > 0$ dla $x \in [a, b]$ oraz współczynniku dryfu $b(x)$. Obliczyć $\mathbf{P}_x(X_\tau = a)$

Zad. 6 Obliczyć wartość oczekiwaną momentu wyjścia d wymiarowego procesu Wienera z kuli $B(0, R)$ (dla każdego punktu startowego x wewnątrz kuli).

Zad. 7 Niech $(W_t, \mathbf{P}_x)$ będzie rodziną dwuwymiarowych procesów Wienera, niech D będzie pierścieniem zawartym pomiędzy okręgami $S(0, r), S(0, R)$. Niech τ będzie momentem wyjścia z D. Udowodnić, że

$$\mathbf{P}_x(W_\tau \in S(0, r)) = \frac{\ln R - \ln|x|}{\ln R - \ln r}.$$

Zad. 8 To samo zadanie w trzech wymiarach (wyjście z pierścienia).