Zadania z PS2. Seria 1. **Konstrukcja całki stochastycznej - wstęp.**

Definicja 1 *Niech $T < \infty$. Mówimy, że funkcja $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ ma wahanie skończone na $[0, T]$ jeśli*

$$\sup \sum_{k=1}^{m} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| < \infty,$$

gdzie supremum bierzemy po wszystkich podziałach $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = T$.

Definicja 2 *Powiemy, że $(t_{k,n})_0^\infty$ jest ciągiem podziałów normalnych jeśli $0 = t_{0,n} < t_{1,n} < ... < t_{m_n,n} = T$ oraz $\lim_{n\to\infty} \max_k (t_{k+1,n} - t_{k,n}) = 0$.*

Zad. 1 Niech f ciągła o wahaniu skończonym na $[0, T]$. Pokaż, że dla każdego $\delta > 0$ i dla każdego ciągu podziałów normalnych $(t_{k,n})_{n=1}^\infty$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} |f(t_{k+1,n}) - f(t_{k,n})|^{1+\delta} = 0.$$

Zad. 2 Jako wniosek z poprzedniego zadania pokaż, że proces Wienera W_t ma wahanie nie skończone na każdym przedziale $[0, T]$.

Zad. 3 Niech M ciągły martyngał, $M_0 = 0$. Pokaż, że trajektorie M mają wahanie skończone wtedy i tylko wtedy, gdy $M \equiv 0$.

Wskazówka. Zauważ, że

$$M_t^2 = \sum_{k=0}^{m_n-1} (M_{t_{k+1,n}} - M_{t_{k,n}})^2 + 2 \sum_{k=0}^{m_n-1} M_{t_{k,n}} (M_{t_{k+1,n}} - M_{t_{k,n}}).$$

Definicja 3 *Całka Lebesgue'a-Stieltjesa. Niech funkcja h będzie lewostronnie ciągła*

$$\int_0^T h df = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} h(t_{k,n})(f(t_{k+1,n}) - f(t_{k,n}))$$

Zad. 4 Pokaż, że jeśli $f \in C^1([0, T])$, to

$$\int_0^T h df = \int_0^T h(t) f'(t) dt.$$

Zad. ($*$) Niech $f \in C([0, 1])$, a $(t_{k,n})_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem podziałów normalnych. Jeżeli dla każdej funkcji $h \in C([0, 1])$ istnieje skończona granica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} h(t_{k,n})(f(t_{k+1,n}) - f(t_{k,n})),$$

to f ma wahanie skończone.

Wskazówka. Skorzystaj z twierdzenia Banacha-Steinhausa

Definicja 4 *Całka Wienera. Niech W_t, $t \in [0,T]$ będzie procesem Wienera. Niech $\mathcal{H}$ będzie klasą funkcji h takich, że $h \in C^1([0,T])$ oraz $h(T) = 0$. Dla każdego $h \in \mathcal{H}$ definiujemy*

$$I(h) = \int_0^T h(t)dW_t := -\int_0^T h'(t)W_t dt.$$

Zad. 5 Pokaż, że $I(h)$ jest dobrze określoną zmienną losową. Policz $\mathbf{E}I(h)^2$. Wywnioskuj, że $I : \mathcal{H} \to L^2(\Omega)$ jest izometrią liniową.

Własności Martyngałów z czasem ciągłym

Definicja 5 *Rodzina zmiennych X_i, $i \in I$ nazywa się jednostajnie całkowalną jeśli*

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{i\in I} \mathbf{E}|X_i| 1_{|X_i|\geqslant r} = 0.$$

Zad. 6 Rodzina X_i, $i \in I$ jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy

1. $\sup_{i\in I} \mathbf{E}|X_i| < \infty$
2. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że dla każdego $\mathbf{P}(A) < \delta$

$$\sup_{i\in I} \mathbf{E}|X_i| 1_A < \varepsilon.$$

Zad. 7 Pokaż, że jeśli $X \in L^1(\Omega)$, $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$, $i \in I$, to rodzina $\mathbf{E}(X|\mathcal{F}_i)$ jest rodziną jednostajnie całkowalną. Przypomnij charakteryzację zbieżności p.n. i zbieżności w L_1 martyngałów.

Zad. 8 Udowodnij, że jeśli M_t jest martyngałem prawostronnie ciągłym, $p > 1$, to

$$\mathbf{E}(\sup_t |M_t|^p) \leqslant (\frac{p}{p-1})^p \sup_t \mathbf{E}|M_t|^p.$$