

Zadania z EK2. Seria 3. MNK z warunkami na parametry

Warunki poboczne  $B\alpha = b$ , macierz  $p \times (k + 1)$ ,  $b$  wektor  $p \times 1$ ,  $\alpha$  wektor parametrów.

$$\hat{\alpha}^* = \hat{\alpha} - (X^T X)^{-1} B^T [B(X^T X)^{-1} B^T]^{-1} (B\hat{\alpha} - b)$$

**Zad. 1** Pokaż, że  $\hat{\alpha}$  jest nieobciążonym estymatorem parametru  $\alpha$  w modelu z ograniczeniami. Udowodnij, że wariancja tego estymatora jest równa

$$D^2(\hat{\alpha}^*) = D^2(\hat{\alpha}) [I - B^T [B(X^T X)^{-1} B^T]^{-1} B(X^T X)^{-1}].$$

**Zad. 2** Model ma postać

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1,i} + \alpha_2 x_{2,i} + \alpha_3 x_{3,i} + \varepsilon_i.$$

Wiadomo, że parametry strukturalne tego modelu spełniają następujący układ równań

$$\alpha_1 = 0,5, \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_1} = 1,2, \quad \alpha_2 + \alpha_3 = 0,8.$$

Zapisz podane restrykcje w formie macierzowej.

**Zad. 3** Model ma postać

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1,i} + \alpha_2 x_{2,i} + \alpha_3 x_{3,i} + \varepsilon_i.$$

Czy można estymować parametry modelu, jeśli przyjęto dodatkowe warunki

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_0 = -2, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = 5, \quad \alpha_3 = (1 - \alpha_1)/5.$$

Jeśli tak to zapisz restrykcje w formie macierzowej.

**Zad. 4** W wyniku estymacji parametrów otrzymano model

$$\bar{y}_i = 1,21 + 0,91x_{1,i} + 0,09x_{2,i} - 1,499x_{3,i}.$$

Wiedząc, że próba liczyła 19 obserwacji, oceń czy parametry strukturalne spełniają podany zbiór warunków.

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0,6, \quad \alpha_2 + \alpha_3 = -0,5, \quad \alpha_3 = -\alpha_1.$$

**Zad. 5** Rozważ model MNK w którym  $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , oraz

$$(X^T X)^{-1} := \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Niech ponadto  $\bar{y} = 1$ ,  $\sum_{i=1}^8 x_{1,i} y_i = 10$ ,  $\sum_{i=1}^8 x_{2,i} y_i = 12$  Oblicz estymator  $\hat{\alpha}^*$ .

**Zad. 6** Dany jest model  $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1,i} + \alpha_2 x_{2,i} + \varepsilon_i$  oraz następujące informacje

$$(X^T X) = \frac{1}{108} \begin{bmatrix} 27 & \cdot & \cdot \\ -18 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 36 \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{12} x_{1,i} y_i = 9, \quad \bar{y} = 0,5$$

Wiadomo iż oszacowanie wyrazu wolnego wyniosło 1 natomiast wartość odpowiedniej statystyki  $t$  równa się 2. Oszacuj pozostałe parametry modelu i wyznacz współczynnik determinacji  $R^2$ .