Zadania z EK2. Seria 1. **MNK i MNW**

Jednorównaniowy model ekonometryczny z jedną zmienną objaśniającą

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \tag{1}$$

Zad. 1 Niech $\bar{x}, \bar{y}$ będą średnimi w próbkach X i Y (to znaczy $\bar{x} = (x_1 + ... + x_n)/n$, $\bar{y} = (y_1 + ... + y_n)/n$). Pokaż, że w przypadku modelu (1) estymatory MNK parametów β_0 i β_1 zadane są wzorami

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}, \quad b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Wartościami teoretycznymi zmiennej objaśnianej nazywa się $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$.

Zad. 2 Przy klasycznym założeniu 'homoskedatyczności' tzn. ε_i niezależne zmienne losowe z rozkładu $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, znajdź $\mathbf{E}(b_0, b_1)$ oraz macierz kowariancji (2×2) $\mathbf{Cov}(b_0, b_1)$.

Zad. 3 Metodą MNK oszacowano dwa modele: $\hat{y}_i = b_0 - b_1 x_i$ oraz $\hat{x}_i = a_0 + a_1 y_i$. Czy $b_0 = a_0$ i $b_1 = a_1$.

Zad. 4 Oszacować parametry modelu $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ $i = 1, ..., 10$ jeśli

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 30, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 40, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 100, \quad \sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 50.$$

Zad. 5 Na podstawie tej samej próby trzema róznymi metodami oszacowano parametry pewnego modelu. Otrzymano nastepujące wektory reszt

$$a = [1, -2, 0, 5, -1, -3], \quad b = [2, -2, 6, 4, -5, -6], \quad c = [2, -2, 6, -6, -1, 1].$$

Wiadomo, że jedną z zastosowanych metod jest MNK. Który wektor reszt odpowiada tej metodzie?

Jednorównaniowy model ekonometryczny z wieloma zmiennymi objaśniającymi

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + ... + \beta_k x_{k,i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2}$$

W zapise macierzowym $Y = X\beta + \varepsilon$.

Zad. 6 Udowonij, że estymator MNK dla (2) zadany jest wzorem $b = (X^T X)^{-1} X^T Y$.

Zad. 7 Oblicz $\mathbf{E}b$ oraz macierz kowaraiancji $(n+1) \times (n+1)$ $\mathbf{Cov}b$.

Zad. 8 Dokonać esytmacji parametrów w modelu

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \varepsilon_i$$

w opraciu o pewne dane statsytsyczne z lat 1998-2002, jesli wiadomo, że

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix},$$

gdzie $u_{1,1} = 6$, $u_{2,1} = 1$, $u_{2,3} = 0$, $u_{2,2} = 5$ $u_{3,1} = 2$, $u_{3,3} = 4$ oraz $\bar{y} = 1$, $\sum_{i=1}^{8} x_{1,i} y_i = 10$, $\sum_{i=1}^{8} x_{2,i} y_i = 12$.

Zad. 9 Wiadomo,że zachodzą zależności

$$x_{1i} + x_{2i} = x_{4i}, \quad \frac{x_{4i}}{x_{5i}} = x_{6i}, \quad x_{3,i} + 2x_{5,i} = 1, \quad \frac{x_{1i}}{x_{6i}} = 1, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Których modeli nie można szcować MNK i dlaczego

1. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \beta_3 x_{3,i} + \varepsilon_i$,
2. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \beta_4 x_{4,i} + \varepsilon_i$,
3. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_3 x_{3,i} + \beta_5 x_{5,i} + \varepsilon_i$,
4. $y_i = \beta_0 + \beta_3 x_{3,i} + \beta_4 x_{4,i} + \beta_6 x_{6,i} + \varepsilon_i$,
5. $y_i = \beta_0 + \beta_2 x_{2,i} + \beta_3 x_{3,i} + \beta_4 x_{4,i} + \beta_5 x_{5,i} + \beta_6 x_{6,i} + \varepsilon_i$,
6. $y_i = \beta_0 + \beta_4 x_{4,i} + \beta_5 x_{5,i} + \beta_6 x_{6,i} + \varepsilon_i$.

MNW. Niech $(X, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ będzie przestrzenią statystyczną. Przypuśćmy, że $\mathcal{P} = (\mathbf{P}_\alpha)_{\alpha \in A}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^k$. Zakładamy, że na A istnieje miara μ, która dominuje wszystkie $\mathcal{P}_\alpha$. Funkcją wiarygodności nazywamy

$$L(x, \alpha) = f(x, \alpha),$$

gdzie f jest gęstością rozkładu $\mathbf{P}_\alpha$ względem miary μ.

Definicja 1 *Estymatorem MNW parametru α nazywamy statystykę $\hat{\alpha}(x)$ dla której*

$$L(x, \hat{\alpha}(x)) = \sup_{\alpha \in A} L(x, \alpha).$$

Zad 10 Niech $(x_1, ..., x_n)$ będzie próbą z rozkładu $\mathcal{B}(1, p)$, $p \in [0, 1]$. Znajdź estymator MNW parametru p.

Zad 11 Niech $(x_1, ..., x_n)$ będzie próbą z rozkładu $\mathcal{U}(0, a)$, $a > 0$. Znajdź estymator MNW dla parametru a.

Zad 12 Niech $(x_1, ..., x_n)$ będzie próbą z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$. Znajdź estymator MNW dla parametrów m i σ^2.

Zad 13 Niech $(x_1, ..., x_n)$ będzie próbą z rozkładu wykładniczego $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Znajdź estymator MNW funkcji niezawodności $e^{-\lambda z}$, gdzie z jest ustaloną liczbą dodatnią.