Definicja: $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x, czyli największą liczbę całkowitą z półprostej $(-\infty, x]$, np. $[3.14] = 3$, $[-3.14] = -4$, $[-2] = -2$, $[99] = 99$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-\sqrt{2}] = -2$, $[-e] = -3$, $[e] = 2$.

1. Znaleźć punkty ciągłości funkcji f, jeśli:
(a) $f(x) = [x]$, (b) $f(x) = x[x]$,
(c) $f(x) = (x-1)[x]$, (d) $f(x) = \big[\,|x|\,\big]$,
(e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \text{ wymiernego,} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernego,} \end{cases}$ (f) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \text{ wymiernego,} \\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernego.} \end{cases}$

2. Wykazać, że funkcja $x^{12} - 17x^8 + 23x^3 - 121x + 7$, określona na całej prostej, ma wartość najmniejszą.

3. Niech $f(x) = \dfrac{\sin\left(\ln\left(e^{x^2} + \cos\left(\ln\left(x^2+7\right)\right)\right)\right)}{\left(2 + \cos\sqrt{(1+|x|)}\right)\left(x^2+1\right)^{10}}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma wartość najmniejszą i największą.

4. (a) Korzystając z nierówności $\sin x < x$ dla $x > 0$, znanej z wykładu, wykazać, że funkcje $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają warunek Lipschitza ze stałą $L = 1$.
(b) Wykazać, że funkcja $\ln\colon (a, \infty) \to R$ spełnia warunek Lipschitza dla $a > 0$ ze stałą zależną od a. Można skorzystać z tego, że $\ln(1+t) < t$ dla $t > -1$. Wykazać, że nie spełnia ona warunku Lipschitza na $(0, \infty)$.
(c) Wykazać, że funkcja wykładnicza o podstawie e spełnia warunek Lipschitza na półprostej $(-\infty, a)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a, natomiast nie spełnia warunku Lipschitza na $\mathbb{R}$.
(d) Niech $f_a(x) = x^a$. Wyjaśnić, na których spośród przedziałów $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,\infty)$ funkcja f_a spełnia warunek Lipschitza: $a = \dfrac{1}{3}$, $a = 1$, $a = 3$.

5. Rozstrzygnąć, czy funkcja f spełnia warunek Lipschitza na przedziale P, jeśli
(a) $f(x) = \sin x^2$, $P = (0,1)$; (b) $f(x) = \sin x^2$, $P = (1,\infty)$;
(c) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $P = (0,1)$; (d) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $P = (1,\infty)$;
(e) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $P = (0,1)$; (f) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $P = \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$;
(g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $P = (0,1)$; (h) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $P = (1, 2005)$.

6. Wykazać, że jeśli funkcja f spełnia warunek Lipschitza na zbiorze ograniczonym D, to istnieje liczba $M \in \mathbb{R}$ taka, że dla każdego punktu $x \in D$ zachodzi nierówność $|f(x)| \le M$, tzn. *funkcja spełniająca warunek Lipschitza na zbiorze ograniczonym jest na tym zbiorze ograniczona.*