1. Określić, jeśli to możliwe, wartości parametrów a, b, tak by funkcja f była ciągła:

(a) $f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2) & \text{dla } x > 0; \\ a & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{dla } x > 0; \\ a & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } |x| \le 1; \\ x^2 + ax + b & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{dla } x > 0; \\ ax + b & \text{dla } x \le 0. \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x} & \text{dla } x > 0; \\ a & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x > 0; \\ a & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

2. Wykazać, że jeśli funkcja $f : (a, b) \to R$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in (a, b)$ i $f(x_0) > 0$, to istnieje $\delta > 0$, taka że jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $f(x) > 0$ (*w pewnym otoczeniu* punktu, w którym f jest ciągła i dodatnia, wszystkie wartości f są dodatnie).

3. Wykazać, że każde z poniższych równań ma *co najmniej* dwa pierwiastki rzeczywiste:

(a) $e^x = 1 + 2x$, (b) $2^x = 4x$.

4. Wykazać, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

5. Punkt x_0 nazywamy *punktem stałym* funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = x_0$.

(a) Niech $f : [a, b] \to [a, b]$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że funkcja f ma co najmniej jeden punkt stały.

(b) Podać przykład funkcji $f : [a, b] \to [a, b]$, takiej że $f(x) \ne x$ dla każdej liczby $x \in [a, b]$, czyli funkcji f, która nie ma punktu stałego.

(c) Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i nierosnącą, to f ma dokładnie jeden punkt stały.

(d) Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zwężająca, tzn. istnieje liczba nieujemna $c < 1$, taka że dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi $|f(x_1) - f(x_2)| \le c\,|x_1 - x_2|$, to funkcja f ma dokładnie jeden punkt stały.

Czy $\mathbb{R}$ można zastąpić przedziałem $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, jeśli $a, b \in \mathbb{R}$?

6. Niech $f(x) = 1 - 2|x|$ dla $-1 \le x \le 1$. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje punkt $x_n \in [-1, 1]$ taki, że $\underbrace{f(f(f \dots f}_{n \text{ razy } f}(x_n))) = x_n$ i jednocześnie dla każdej liczby $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ zachodzi $\underbrace{f(f(f \dots f}_{k \text{ razy } f}(x_n))) \ne x_n$.

To zadanie nie jest trudne, ale umieszczam z myślą o studentach bardziej zainteresowanych matematyką, można je rozwiązać w przypadku n=2,3 narysowawszy wykresy funkcji $f \circ f$ i $f \circ f \circ f$; to już da pewien pogląd na problem.