1. Zbadać, czy istnieje granica funkcji f w punkcie x_0, jeśli $f(x) =$

(a) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2}$, $x_0 = +\infty$; (b) $\dfrac{x-1}{x^2-1}$, $x_0 = 1$;

(c) $\dfrac{e^x-1}{2x}$, $x_0 = 0$; (d) $\dfrac{e^{2x}-1}{x}$, $x_0 = 0$;

(e) e^{-1/x^2}, $x_0 = 0$; (f) e^{-1/x^2}, $x_0 = \infty$;

(g) $\dfrac{1}{x}e^{-1/x^2}$, $x_0 = 0$; (h) $\dfrac{1}{1+e^{1/(1-x)}}$, $x_0 = 1$.

2. Znaleźć następujące granice, jeśli istnieją :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 13x}{\sin 7x}$, (b) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$, (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{17 - 257x + 3x^2}{9x^2 - 13z + 1}$,

(d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1 - 3x + 5x^2 - 7x^3}{11 - 13x^3 + 17x^5}$, (e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^7 - 1}$, (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{x}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$, (h) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$, (i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

3. Znajdź granice, o ile istnieją:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}$, gdzie $\varepsilon > 0$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin(x+1) - \sin x)$; (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x+x^2}{e^x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(x^{100}\right)}{x^{0,01}}$; (E) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin(x+1)^2 - \sin x^2\right)$; (f) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+x)^{1/x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$; (h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$; (i) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$.

Uwaga: punkt E *jest przeznaczony dla nieco bardziej zainteresowanych studentów, zadanie nie jest trudne, ale wymaga zrozumienia sytuacji, sztuczki rachunkowe mogą nie doprowadzić w tym przypadku do celu. Można najpierw wykazać, że jeśli granica istnieje, to jest równa* 0 *rozpatrując np. ciąg o wyrazie* $x_n = \frac{2n\pi - 1}{2}$, *oczywiście* $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. *Następnie rozważyć np. ciąg o wyrazie* $t_n = 2n\sqrt{2\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. *Dojść do sprzeczności uzasadniając następujące implikacje*

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left(\sin(t_n+1)^2 - \sin t_n^2\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sin(1 + 4n\sqrt{\pi}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sin(1 + 4(2n)\sqrt{\pi}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sin(4n\sqrt{\pi}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sin(1+4n\sqrt{\pi}) = 0 = \lim_{n\to\infty} \sin(4n\sqrt{\pi}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos(4n\sqrt{\pi}) = 0.$$

4. *Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji* f, *jeśli ta funkcja ma odwrotną , gdy* $f(x) =$

(a) $x + 7$ dla $x > -7$; *(b)* $\dfrac{x+3}{2x-1}$ *dla* $x \neq \dfrac{1}{2}$; *(c)* e^{x^3} *dla* $x \in \mathbb{R}$;

(d) x^2 dla $x \in (-1; 1)$; *(e)* x^2 *dla* $x \in (0; 1)$; *(f)* x^2 dla $x \in (-1; 0)$.

Przypomnienie: w środę, 30 listopada w czasie ćwiczeń z algebry liniowej odbędzie się druga klasówka szkolna.

Tematy: funkcje, ich wykresy i funkcja liniowa; funkcja kwadratowa; potęgi i logarytmy; trygonometria.