1. Wypisać pierwszych sześć wyrazów szeregu. Zbadać jego zbieżność i zbieżność bezwzględną:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{2n+1}\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{2n-1}\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+(-1)^{n+1}}\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3(n+1)}\left(1-2\cos\frac{2\pi(n+1)}{3}-2\cos\frac{4\pi(n+1)}{3}\right).$$

2. Wykazać, że szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{n\big(1+\cos(n\pi)\big)+n^2\big(1+\cos(n+1)\pi\big)}$ jest rozbieżny. Wypisać jego sześć pierwszych wyrazów. Dlaczego ten szereg nie reaguje na kryterium Leibniza?

3. Dla jakich $x\epsilon R$ szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, a dla jakich zbieżny bezwzględnie, jeśli $a_n =$

$$\frac{x^n}{n^2},\qquad \frac{x^n}{n^n},\qquad n^nx^n,\qquad 2^nx^{2n},\qquad \frac{2^nx^n}{n^3},\qquad \frac{x^n}{n},\qquad \frac{x^{n!}}{n}\,.$$

4. a. Dowieść, że $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)=\ln 2$. *Wskazówka*: jeśli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=0$, to $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=1$.

b. Zbadać, dla jakich α szereg $\sum n^{\alpha}(\sqrt[n]{2}-1)$ jest zbieżny.

c. Zbadać, dla jakich α szereg $\sum n^{\alpha}\ln n$ jest zbieżny.

d. Zbadać, dla jakich α szereg $\sum n^{\alpha}(\sqrt[n]{n}-1)$ jest zbieżny.

5. Niech

$$s_0 = 1-\tfrac12-\tfrac14+\tfrac13-\tfrac16-\tfrac18+\tfrac15-\tfrac1{10}-\tfrac1{12}+\tfrac17-\tfrac1{14}-\tfrac1{16}+\dots\,,$$
$$s_1 = 1-\tfrac12+\tfrac13-\tfrac14+\tfrac15-\tfrac16+\tfrac17-\tfrac18+\tfrac19-\tfrac1{10}+\tfrac1{11}-\tfrac1{12}+\dots\,,$$
$$s_2 = 1+\tfrac13-\tfrac12+\tfrac15+\tfrac17-\tfrac14+\tfrac19+\tfrac1{11}-\tfrac16+\tfrac1{13}+\tfrac1{15}-\tfrac18+\dots\,.$$

Wykazać, że $s_2=\frac32 s_1$ oraz $s_1=2s_0$.

Rezultat ten pokazuje jakie zmiany mogą nastąpić w wyniku zmiany kolejności sumowania wyrazów szeregu zbieżnego, ale nie bezwzględnie. B.Riemann wykazał, że zmiana kolejności sumowania *nieskończonego* może prowadzić do dowolnej zmiany sumy! Może też doprowadzić do tego szeregu rozbieżnego, którego suma jest nieskończona (zob. następne zadanie) lub do szeregu, którego sum częściowych w ogóle nie ma granicy (można samodzielnie przerobić przykład z zadania 6). Oczywiście uwagi te nie dotyczą szeregów bezwzględnie zbieżnych, w tym szeregów o wyrazach dodatnich.

6. Wykazać, że szereg $-1+\frac12-\frac13+\frac14+\frac16-\frac15+\frac18+\frac1{10}+\frac1{12}-\frac17+\frac1{14}+\frac1{16}+\frac1{18}+\frac1{20}-\frac19+\frac1{22}+\frac1{24}+\frac1{26}+\frac1{28}+\frac1{30}-\frac1{11}+\frac1{32}+\cdots$ jest rozbieżny, dokładniej, że jego suma równa jest $+\infty$: w szeregu występują odwrotności wszystkich liczb naturalnych, nieparzystych ze znakiem $-$, parzystych ze znakiem $+$, po $k-$tym minusie następuje k plusów, po nich następny minus, a więc ten szereg ma takie same wyrazy jak szereg zbieżny $-1+\frac12-\frac13+\frac14-\frac15+\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac1n$, widzimy więc, że zmiana kolejności sumowania może spowodować, że z szeregu zbieżnego otrzymamy szereg o sumie *nieskończonej*.