Analiza matematyczna dla ekonomistów, ćwiczenia piąte, 2005/2006

1. Obliczyć sumy następujących szeregów:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, 2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, 3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$,

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+2}}$, 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$, 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$,

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^n$, 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos n\pi}{5^{n-1}}$, 9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n+\cos n\pi)^2}{5^{n-1}}$

— **w szóstym i w siódmym przykładzie zakładamy, że** $|q|<1$.

2. Zbadać zbieżność szeregu

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$, b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+q^n}$, $q>0$,

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^{10}\left(4+(-1)^n\right)^n}$, e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^{10}\left(5+(-1)^n\right)^n}$, f. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^{10}\left(7+(-1)^n\right)^n}$,

g. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$, h. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,000000001^n}{n^{10000000001}}$, i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+15n-321}{n^4-17n^2-3297}$.

3. Dla jakich liczb rzeczywistych α szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeśli $a_n=$

(i) $\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^{\alpha}$, (ii) $\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\alpha}$, (iii) $\displaystyle\frac{1}{n^{\alpha}\ln n}$, (iv) $\displaystyle\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha}$.

4. Załóżmy, że dla każdego n naturalnego liczby a_n i b_n są dodatnie.

a. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=0$. Wyjaśnić, czy ze zbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oraz czy ze zbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\infty$. Wyjaśnić, czy ze zbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oraz czy ze zbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

c. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}a_n=0$. Dla jakich α wynika stąd rozbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a dla jakich jego zbieżność?

d. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}a_n=1$. Dla jakich α wynika stąd rozbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a dla jakich jego zbieżność?

e. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}a_n=\infty$. Dla jakich α wynika stąd rozbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a dla jakich jego zbieżność?