Analiza matematyczna dla ekonomistów, ćwiczenia czwarte, 2005/2006

1. Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu (a_n), jeśli $a_n =$

(1) $\left(1+\sqrt[n]{2}\right)^n$; (2) $\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{2}}{n}\right)^n$; (3) $\dfrac{\ln n}{n}$;

(4) $\dfrac{e^{b_n}-1}{b_n}$, gdzie b_n oznacza $n-ty$ wyraz pewnego ciągu zbieżnego do 0,

przy czym $b_n \neq 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Wskazówka: dla $x < 1$ zachodzi nierówność $1 + x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$;

(5) $\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{1/n}$; (6) $\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{2}}{2}\right)^n$; (7) $n - \ln n$;

(8) $\dfrac{1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5-\frac{1}{6}n^6}{n^5}$; (9) $\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}$;

(10) $n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$; (11) $\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$;

(12) $\dfrac{1}{\ln n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$; (13) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Znaleźć granicę ciągu (a_n), jeśli $a_0 = \frac{1}{10}$ oraz $a_{n+1} =$

(1) $\sin a_n$; (2) $-a_n + \frac{1}{2}a_n^3$; (3) $2^{a_n} - 1$

– istnienie poszukiwanej granicy należy oczywiście wykazać!

3. Czy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ istnieje? Jeśli ta granica istnieje, to czy jest skończona?

(1) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$; (2) $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{4^4}+\cdots+\dfrac{1}{n^n}$;

(3) $a_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 3^3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot n^n}$; (4) $a_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$;

(5) $a_n = 1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{4n-3}+\dfrac{1}{4n-2}-\dfrac{1}{4n-1}-\dfrac{1}{4n}$.