Analiza matematyczna dla ekonomistów, ćwiczenia trzecie 2005/2006

1. Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ciągu (a_n), o ile istnieje, jeśli $a_n =$

(1) $\left(1+\dfrac{2}{n+2}\right)^n$, (2) $\left(0.999999+\dfrac{1}{n}\right)^n$,

(3) $\left(\dfrac{n^2+5n-3}{n^2+13}\right)^n$, (4) $\left(1.000001+\dfrac{1}{n}\right)^n$,

(5) $\dfrac{1000000^n}{n!}$, (6) $\dfrac{n^{100000}}{1.000001^n}$.

2. Wykazać, że ciąg (a_n) ma granicę i zbadać, czy jest ona skończona, czy jest równa 0, jeśli ciąg (a_n) zdefiniowany jest wzorem $a_n =$

(a) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}$. (b) $1+\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

(c) $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$. (d) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

(e) $\sqrt{6+a_{n-1}}$ dla $n=1,2,3,\ldots$ przy czym a_0 jest tu dowolną liczbą rzeczywistą nieujemną, znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(f) $\dfrac{1}{2}\left(a_{n-1}+\dfrac{5}{a_{n-1}}\right)$ dla $n=1,2,3,\ldots$ przy czym a_0 jest tu dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Wskazówka: wykazać, że dla $n=0,1,2\ldots$ zachodzą nierówności $a_{n+1}\geq\sqrt{5}$ oraz $a_{n+1}\geq a_{n+2}$.

(g)* $\left(1+\dfrac{1}{1^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Wskazówka: skorzystać z tego, że $1+x\leq e^x$ dla każdej liczby x.

(h)* $\left(1-\dfrac{1}{2^1}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^3}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$, czy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

Wskazówka: wykazać, że dla $x<1$ zachodzi nierówność

$$1-x=\frac{1}{1+\frac{x}{1-x}}\geq e^{-x/(1-x)}.$$

Uwaga: *Punkty opatrzone gwiazdką są przeznaczone dla studentów bardziej zainteresowanych matematyką z nadzieją, że zostaną samodzielnie przemyślane w domu.*