Analiza matematyczna dla ekonomistów, ćwiczenia XXIII, 2005/2006

1. Obliczyć $\int f(x)dx$, jeśli $f(x) =$

a. $x + 3x^2 - 12x^4$	**b.** $x(1+x^2)^4$	**c.** e^{2x}
d. $\sin 3x$	**e.** $x\sin(x^2)$	**f.** $\frac{1}{1+4x^2}$
g. $\frac{x}{1+4x^2}$	**h.** $\frac{1}{1+3x^2}$	**i.** $\frac{1}{2+3x^2}$
j. $\frac{x^2+2x-2}{2+3x^2}$	**k.** $\mathrm{tg}x$	**l.** $\frac{1}{1+2x}$
m. $\frac{x}{1+2x}$	**n.** $\frac{x^2+2x+3}{x+2}$	**o.** $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$
p. $\frac{x}{(x+1)(x-2)}$	**q.** $\sin x\cos x$	**r.** $\frac{e^x}{1+e^x}$
s. $x^2\sqrt{x^3-1}$	**t.** $e^{\sqrt{x}}$	**u.** $x\sin 2x$
v. $x^2\sin x$	**w.** xe^x	**x.** x^2e^{2x}
y. $\mathrm{arctg}x$	**z.** $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$	**ż.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$
ź. $\sin^3 x$	α**.** $\frac{1}{\sin^2 x}$	β**.** $\cos x\cdot e^{\sin x}$
γ**.** $\frac{\ln x}{x}$	δ**.** $e^x\sin x$	ε**.** $e^{2x}\sin 5x$

Uwaga: Większość tych całek powinna być policzona przez studentów samodzielnie i to **nie w czasie ćwiczeń**. Na zajęciach powinny być obliczone tylko niektóre, najlepiej te, z którymi studenci nie mogli dać sobie rady poza zajęciami.

Informacja: Symbol $\int f(x)dx$ oznacza funkcję pierwotną funkcji f zwaną też całką nieoznaczoną. Mamy więc $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. Jeśli dziedziną funkcji f jest przedział i ma ona funkcję pierwotną w całej dziedzinie, to ma ich nieskończenie wiele, ale nie różnią się one bardzo jedna od drugiej: różnica między dwiema funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji jest stała na każdym przedziale, na którym obie funkcje pierwotne są określone. Zwyczajowo piszemy $\int f(x)dx = F(x)+C$ przyjmując, że F jest pewną funkcją pierwotną funkcji f a C pewną stałą. Jeśli dziedzina funkcji f jest sumą pewnej liczby rozłącznych przedziałów, to symbol C oznacza funkcję stałą *na każdym przedziale zawartym w dziedzinie funkcji* f.

Wzór na całkowanie przez podstawienie: $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy$ należy rozumieć tak: funkcją pierwotna funkcji $f(g(x))g'(x)$ jest funkcja $F(y)$, czyli funkcja $F(g(x))$, oznaczenie $F(y)$ nie jest dokładne, bo zmieniliśmy zmienną i musimy pamiętać o tym skrócie: y to po prostu $g(x)$. Piszemy często: jeśli $y = g(x)$, to $dy = g'(x)\,dx$. Zapis ten jest wygodny, choć symbolowi dx nie nadajemy sensu, nie występuje on samodzielnie. Często też stosowany jest zapis: jeśli $y = g(x)$, to $\dfrac{dy}{dx} = g'(x)$ i wtedy $dy = g'(x)\,dx$ lub $dx = \dfrac{1}{g'(x)\,dy}$. Ten sposób pisania jest bardzo wygodny, jednak należy pamiętać o tym, że dx i dy nie są przez nas zdefiniowane jako samodzielne symbole, a wyrażenie $\dfrac{dy}{dx}$ nie jest ilorazem tych wielkości, a jedynie oznaczeniem (jako całość) pochodnej funkcji przypisującej igreki iksom. Wolno tymi symbolami manipulować nieomal jak licznikiem i mianownikiem ułamka dzięki twierdzeniom o pochodnej złożenia dwu funkcji $\left(\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)$ i twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej $\left(\dfrac{1}{dy/dx} = \dfrac{dx}{dy}\right)$.

Wzór na całkowanie przez części: $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ to po prostu wzór na pochodną iloczynu dwu funkcji zapisany za pomocą symbolu całki, bywa pisany w skróconej formie $\int f\,dg = fg - \int g\,df$.