Analiza matematyczna dla ekonomistów, ćwiczenia XXII, 2005/2006

1. Niech $A = [a_{i,j}]$ będzie macierzą wymiaru $k \times k$ i niech $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{x})$. Obliczyć $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

2. Niech $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ dla $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Wykazać, że w całej dziedzinie funkcji f zachodzi równość $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

3. Niech $f(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^a$ dla $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ i $a > 0$. Wykazać, że $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ dla każdego $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 1$.

4. Niech $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Wykazać, że dla każdego (x,y) kolumny macierzy $Df(x,y)$ są wzajemnie prostopadłymi wektorami o równej długości.

5. Niech f oznacza funkcję określoną w zadaniu czwartym. Wykazać, że dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ macierz $Df(x,y)$ jest nieosobliwa (jej wyznacznik jest $\neq 0$), chociaż funkcja f nie jest różnowartościowa.

6. Niech f oznacza funkcję różniczkowalną określoną na pewnym zbiorze otwartym w $\mathbb{R}^k$. Obliczyć

a. $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ oraz $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, jeśli $g(x,y) = f(x^2, y^3)$, $k = 2$;

b. $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ oraz $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, jeśli $g(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$, $k = 1$;

c. $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ oraz $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, jeśli $g(x,y) = f(x \cos y, x \sin y)$, $k = 2$;

d. $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ oraz $\dfrac{\partial g}{\partial z}$, jeśli $g(x,y,z) = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}\right)$, $k = 2$.

7. Niech $f(x,y) = g(x+y) + h(x-y)$, gdzie g i h są funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi. Wykazać, że $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

8. Niech $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną o ciągłych pochodnych cząstkowych drugiego rzędu i niech $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ w każdym punkcie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Niech $\alpha(u,v) = f(u+v, u-v)$. Wykazać, że $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$. Wywnioskować stąd, że istnieją funkcje jednej zmiennej g oraz h takie, że $f(x,y) = g(x+y) + h(x-y)$ dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Egzamin odbędzie się 20 czerwca 2006 r, z rana: początek o 8:00. Skończy się **przed** 13:00. Będzie 10 zadań, trzeba będzie mieć 10 kartek.

Na stronach www dr. R.Sztencla i mojej znajduje się formularz egzaminacyjny, można go użyć.