1. Znaleźć maksimum i minimum funkcji f na zbiorze E dla

(a) $f(x,y)=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$; $E=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$;

(b) $f(x,y)=4xy$; $E=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$;

(c) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$; $E=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 100\}$;

(d) $f(x,y,z)=x+y+z$; $E=\{(x,y,z): x^2+y^2\le z\le 1\}$;

(e) $f(x,y,z)=x-2y+2z$; $E=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\}$;

(f) $f(x,y,z)=xyz$; $E=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0\}$;

(g) $f(x,y,z)=xyz$; $E=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1,\ x+y+z=0\}$;

(h) $f(x,y,z)=xyz$; $E=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=1\}$;

(i) $f(x,y,z)=xyz$; $E=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1,\ x+y+z=1\}$;

(j) $f(x,y,z)=xyz$; $E=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1,\ x+y+z\le 1\}$;

(k) $f(x,y,z)=xy^2z^3$; $E=\{(x,y,z): x+y+z=6,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$;

(l) $f(x,y,z)=\sin x\sin y\sin z$; $E=\{(x,y,z): x+y+z=\frac{\pi}{2},\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$.

(ł) $f(x_1,x_2,\ldots,x_{10})=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+\cdots+x_9x_{10}$,
$E=\{(x_1,x_2,\ldots,x_{10}):\quad x_1+x_2+\ldots+x_{10}=10,\ x_1,x_2,\ldots,x_{10}\ge 0\}$

(m) $f(x_1,x_2,\ldots,x_{10})=x_1+x_2+\ldots+x_{10}$,
$E=\{(x_1,x_2,\ldots,x_{10}):\quad x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+\cdots+x_9x_{10}=45,\ x_1,x_2,\ldots,x_{10}\ge 0\}$;

(n) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{3x^2+y^2+1}$, $E=\mathbb{R}^2$.

2. Znaleźć punkty na powierzchni $z=xy+5$, które znajdują się najbliżej punktu $(0,0,0)$.

3. Znaleźć maksimum objętości prostopadłościanu o ścianach prostopadłych do odpowiednich osi układu współrzędnych wpisanego w elipsoidę $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

4. Znaleźć minimum sumy kwadratów 100 liczb dodatnich, których suma wynosi 200.

5. Pokazać, że maksimum funkcji produkcji $P(x,y)=x^\alpha y^\beta$ (gdzie $\alpha+\beta=1$, $\alpha>0$, $\beta>0$) przy stałych kosztach $ax+by=1$ jest osiągane dla $x=\dfrac{\alpha}{a}$ i $y=\dfrac{\beta}{b}$.

6. Pokazać, że minimum funkcji kosztów $C(x,y)=ax+by$ przy stałym poziomie produkcji $x^\alpha y^\beta=P$ (gdzie $\alpha+\beta=1$) jest osiągane dla $x=P\left(\dfrac{\alpha b}{\beta a}\right)^\beta$ oraz $y=P\left(\dfrac{\beta a}{\alpha b}\right)^\alpha$.

7. Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f i wyjaśnić, w których z nich ma ona lokalne minima, w których – lokalne maksima, a w których nie ma lokalnego ekstremum, jeśli

(a) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$;

(b) $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$;

(c) $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$;

(d) $f(x,y,z)=x+\dfrac{4y^2}{x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$;

(e) $f(x,y,z)=xy^2z^3(6-x-2y-3z)$;

(f) $f(x,y)=3x^8+3y^8+8x^3y^3$;

(g) $f(x,y)=y^2+3x^2y-x^3y$;

(h) $f(x,y)=y^2+y^4+3x^4-4x^3-12x^2$;

(i) $f(x,y)=x^5y^7(13-x-y)$;

(j) $f(x,y)=-x^4+y^4+4x^2y-2y^2$;

(k) $f(x,y)=x^4-y^4-2x^3-2xy^2+x^2+y^2$.

ad (j): w otoczeniu punktu $(0,0)$ *rozważyć zachowanie się funkcji* f *na paraboli* $y=x^2$.

8. Niech $f(x,y,z) = \frac{1}{9} \cdot \big(3(x+y)^3 - 18x^2 - 36xy - 54y^2 - 9z^2 + 2\big)$. Znaleźć punkty krytyczne f, tj. te, w których $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \big((x+y)^2 - 4x - 4y,\ (x+y)^2 - 4x - 12y,\ -2z\big)$ jest wektorem zerowym. Wyjaśnić, w których z tych punktów funkcja f ma lokalne minima, w których lokalne maksima, a w których nie ma lokalnego ekstremum.

9. Niech $f(x,y) = 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 + \frac{1}{4}\big(-e^{2x} + (y+1)^2(y-2)^2\big)^2$,

$$g(x,y) = 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 + \tfrac{1}{4}\big(-e^{2x} + y^2(y+3)^2\big)^2 .$$

Znaleźć punkty zerowania się gradientu obu funkcji i wyjaśnić, w których punktach funkcje mają lokalne minima, w których lokalne maksima, a w których nie ma lokalnego ekstremum. Wykazać, że funkcje f i g nie są ograniczone ani z góry ani z dołu.

10. Firma wytwarza 2 produkty. Ceny wynoszą p_1 i p_2. Koszt wytworzenia q_1 sztuk jednego produktu i q_2 sztuk drugiego wynosi $C(q_1,q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2$. Znaleźć maksymalny zysk firmy, tj. $\max \Pi$ dla $\Pi(q_1,q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1,q_2)$ w zbiorze $\{(q_1,q_2):\quad q_1 > 0,\ q_2 > 0\}$.

11. Firma wytwarza 2 produkty. Popyt na te produkty przy cenach p_1 i p_2 wynosi odpowiednio $q_1 = 40 - 2p_1 + p_2$ oraz $q_2 = 15 + p_1 - p_2$. Koszt wytworzenia q_1 sztuk jednego produktu i q_2 sztuk drugiego wynosi $C(q_1,q_2) = q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2$. Jak należy ustalić ceny p_1 i p_2, by zysk firmy $\Pi(p_1,p_2) = p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1,q_2)$ był największy ?

12. Firma wytwarza produkt sprzedawany na trzech rynkach. Niech p_i oznacza cenę produktu na i-tym rynku, a q_i sprzedaną ilość ($i = 1,2,3$). Zależności pomiędzy cenami a ilością produktu na tych rynkach są następujące: $p_1 = 63 - 4q_1$, $p_2 = 105 - 5q_2$ $p_3 = 75 - 6q_3$. Koszt produkcji wynosi $20 + 15(q_1 + q_2 + q_3)$. Obliczyć maksymalny zysk firmy.

13. Wyjaśnić, czy funkcja $(1 + x^{2004}) \cdot (1 + y^{2005}) \cdot (1 + z^{2006})$ ma lokalne ekstremum w punkcie $(0,0,0)$; jeśli tak, to czy ma lokalne minimum czy też maksimum w tym punkcie.

14. Niech $f(x,y,z) = 3x^2 - 8xy - 3y^2 + x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$. Znaleźć kresy funkcji f i jej lokalne ekstrema, wiedząc, że $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 8y + 4x^3 + 24x^2y + 48xy^2 + 32y^3$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = -8x - 6y + 8x^3 + 48x^2y + 96xy^2 + 64y^3$.

15. Niech $A = \{(x,y):\quad x^2 + y^2 = 100\}$, $f(x,y) = 3x + 4y$. Znaleźć $\sup f$ i $\inf f$ na zbiorze A. Znaleźć kres dolny i górny odległości punktów $(x,y) \in B = \{(x,y):\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$ od punktu $(0, \frac{4}{3})$.