1. Wykazać, że ciąg (a_n) jest zbieżny do 0 wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(|a_n|)$ jest zbieżny do 0.

2. Wykazać, że ciąg zbieżny (do granicy skończonej) jest ograniczony.

3. Wykazać, że iloczyn $(a_n b_n)$ ciągu (a_n) zbieżnego do 0 i ciągu ograniczonego (b_n) jest ciągiem zbieżnym do liczby 0.

4. Wykazać, że dla $n > 1000000$ zachodzi nierówność $\sqrt[n]{2} < 1.000001$.

5. Wykazać, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzą nierówności: $n! > 1000000^n$ oraz $1.000001^n > n^{1000000}$. W obu przypadkach sprawdzić, że dla $n = 2, 3, 4, 5$ zachodzi nierówność przeciwna i wskazać liczbę n_0 (nie szukać najmniejszej!) taką, że dla $n > n_0$ zachodzą nierówności wypisane w pierwszym zdaniu.

6. Obliczyć granicę ciągu (a_n), o ile istnieje, jeśli $a_n =$

a. $\sqrt{n + \sqrt[3]{n}} - \sqrt{n}$;

b. $\sqrt{n+13} - \sqrt{n}$;

c. $\sqrt[n]{3^n - 2^n}$;

d. $\sqrt[n]{3^n + \sin n}$;

e. $1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$;

f. $\sin n$;

g. $\dfrac{n^2 + n + 1000}{n^{1000} + 999n - 1}$;

h. $\dfrac{\ln\left(n^2 + n + 1000\right)}{\ln\left(n^{1000} + 999n - 1\right)}$;

i. $\left(1 + \sin \dfrac{1}{n}\right)^n$;

j. $\sqrt[n]{n!}$;

k. $\dfrac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \ldots\ldots \cdot (n+9)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$;

l. $\left(1 + \dfrac{\sin n}{n^2}\right)^n$;

m. $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$;

n. $\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

o. $\dfrac{3^n - 2^n}{3^n + n^2 \cdot 2^n}$;

p. $\dfrac{3^n + 2^n \cdot \sin n}{3^{n+1} + n^{2002}}$.

7. Czy z tego, że

a. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ wynika, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $a_n \le b_n$?

b. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ wynika, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $a_n < b_n$?

8. Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n = e^g$. Należy tu skorzystać z twierdzenia, które pojawi się na wykładzie: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{g}{n}\right)^n = e^g$ oraz jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \alpha_n)^n = 1$.

9. Podać przykład dwóch ciągów liczb dodatnich (a_n) oraz (b_n), takich że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ oraz:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 1$,

b. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$,

c. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \frac{2004}{2005}$.

Klasówka z matematyki szkolnej

Pierwsza klasówka z matematyki szkolnej odbędzie się na ćwiczeniach z algebry 19 października 2005 oczywiście tylko w tych grupach, które mają ćwiczenia w środę. Tematyka: zbiory, liczby rzeczywiste, indukcja i ciągi. W ramach przygotowań można porobić zadanka ze zbioru „Trochę zadań powtórzeniowych z matematyki szkolnej dla studentów WNE", w szczególności zawartość tych rozdziałów determinuje zakres klasówki dosyć dokładnie.