1. Niech $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $D = ac - b^2$. Wykazać, że

(a) jeśli $D > 0$ i $a > 0$, to $0 = f(0,0) < f(x,y))$ dla dowolnego punktu $(x,y) \neq (0,0)$;

(b) jeśli $D > 0$ i $a < 0$, to $0 = f(0,0) > f(x,y)$ dla dowolnego punktu $(x,y) \neq (0,0)$;

(c) jeśli $D < 0$, to funkcja f jest nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu, nie ma też w punkcie $(0,0)$ lokalnego ekstremum;

(d) jeśli $D = 0$ i przynajmniej jedna z liczb a, b, c jest różna od 0, to istnieją liczby $\alpha \neq 0, \beta, \gamma$ takie, że $\beta^2 + \gamma^2 > 0$ i dla dowolnego punktu (x,y) zachodzi $f(x,y) = \alpha(\beta x + \gamma y)^2$ – w tym przypadku f ma w punkcie $(0,0)$ ekstremum niewłaściwe, tj. wartość $f(0,0) = 0$ jest przyjmowana w dowolnym otoczeniu punktu $(0,0)$ nie tylko w tym punkcie, ale również w nieskończenie wielu innych punktach.

2. Mówimy, że punkt $p \in A$ jest punktem ekstremalnym zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy *nie istnieją* punkty $x, y \in A$ takie, że $p = \frac{x+y}{2}$ i $x \neq p \neq y$. Znaleźć punkty ekstremalne zbioru A, jeśli $A =$

$\{(x,y)\colon\ y \geq \lvert x\rvert\}$	$\{(x,y)\colon\ y \leq \lvert x\rvert\}$	$\{(x,y)\colon\ y = \lvert x\rvert\}$
$\{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$	$\{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 \leq 1\}$	$\{(x,y)\colon\ \lvert x\rvert \leq y \leq 2 - \lvert x\rvert\}$

3. Niech zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ będzie wypukły i zwarty a funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$ – ciągła. Wykazać, że

(a) jeśli f jest liniowa, to istnieją punkty ekstremalne p, q zbioru A takie, że dla każdego punktu $x \in A$ zachodzi nierówność $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ (nie twierdzimy, że p jest *jedynym* punktem, w którym f osiąga kres dolny!);

(b) jeśli f jest wypukła, tzn. $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ dla dowolnych $x, y \in A$ oraz dowolnego $t \in (0,1)$, to f osiąga swój kres górny w pewnym punkcie ekstremalnym zbioru A (być może również w innych punktach);

(c) jeśli f jest ściśle wypukła, to osiąga swój kres dolny w dokładnie jednym punkcie (niekoniecznie ekstremalnym).

Uwaga: twierdzenie prawdziwe jest również w R^k *dla* $k \geq 2$.

4. Znaleźć kres dolny i kres górny funkcji f na zbiorze E, jeśli

(a) $f(x,y) = xy - x - y + 3$, E to trójkąt domknięty o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,4)$;

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, $E = \{(x,y)\colon\ \ |x| + |y| \leq 1\}$;

(c) $f(x,y) = xy^2$, $E = \{(x,y)\colon\ \ x^2 + y^2 \leq 3\}$;

(d) $f(x,y) = (1 + x^2)e^{-x^2-y^2}$, $E = \mathbb{R}^2$;

(e) $f(x,y,z) = (x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}$, $E = \{(x,y,z)\colon\ \ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$.

5. Zobaczmy, co się może wydarzyć w wymiarze większym niż 1:

(a) Wykazać, że funkcja $(1 + e^y)\cos x - ye^y$ ma nieskończenie wiele maksimów lokalnych, chociaż nie ma żadnego minimum lokalnego.

(b) Wykazać, że gradient funkcji $2(1 - e^{2y} + x^2)^3 - 3(1 - e^{2y} + x^2)^2 - 24x^2e^{2y}$ zeruje się w dokładnie jednym punkcie, w tym punkcie funkcja ma lokalne maksimum właściwe, chociaż jest nieograniczona z góry (i z dołu).

(c) Niech $f(x,y) = 6y^5 + 15y^4 - 50y^3 - 90y^2 + \frac{1}{4}\left(-e^{2x} + (y+1)^2(y+3)^2\right)^2$. Znaleźć kresy funkcji f oraz punkty, w których funkcja ta ma lokalne ekstrema.

Można skorzystać przy tym z równości: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -e^{2x}\left(-e^{2x} + (y+1)^2(y+3)^2\right)$ oraz $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 30y(y+3)(y+1)(y-2) + 2(y+1)(y+2)(y+3)\left(-e^{2x} + (y+1)^2(y+3)^2\right)$.