Analiza matematyczna dla ekonomistów, ćwiczenia osiemnaste, 2005/2006

1. Pokazać, że niżej zdefiniowana funkcja jest różniczkowalna w $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{jeżeli } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{jeżeli } (x,y) = (0,0). \end{cases},$$

a funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{jeżeli } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{jeżeli } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $(0,0)$, ale różniczkowalna w tym punkcie nie jest.

2. Pokazać, że funkcja $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ nie jest różniczkowalna w $(0,0)$, chociaż istnieją obie pochodne cząstkowe w tym punkcie.

3. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji

(a) $f(x,y) = e^{-x^2-2xy+4}$, (b) $f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y})$,

(c) $f(x,y,z) = e^x \sin y + e^y \sin(2z) + e^z \sin(3x)$, (d) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$, dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

(e) $f(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$, dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, gdzie $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k x_i^2$.

4. Znaleźć kierunek najszybszego wzrostu funkcji f, czyli jej gradient, w punkcie P dla:

(a) $f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$, $\mathbf{p} = (1,-2)$; (b) $f(x,y,z) = \sqrt{xy^2z^3}$, $\mathbf{p} = (2,2,2)$;

(c) $f(x,y,z) = e^{x-y-z}$, $\mathbf{p} = (5,2,3)$; (d) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$, $\mathbf{p} = (1,1,1)$.

Uwaga: jeśli funkcja f zależy od 3 zmiennych, to: $\operatorname{grad} f(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p})\right)$.

5. Znaleźć równanie płaszczyzny (prostej) stycznej do powierzchni $f(x,y,z) = 0$ (krzywej $f(x,y) = 0$) w punkcie $\mathbf{p}$ gdy:

(a) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} - 1$; $\mathbf{p} = (1,-1,1)$,

(b) $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^3 + xyz - 14$; $\mathbf{p} = (5,-2,3)$,

(c) $f(x,y) = x^4 + xy + y^2 - 19$; $\mathbf{p} = (2,-3)$.

6. Pokazać, że niżej zdefiniowana funkcja nie jest różniczkowalna w $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & \text{jeżeli } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{jeżeli } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

chociaż ma obie pochodne cząstkowe w tym punkcie. Pokazać, że pochodna kierunkowa $f'_v(0,0)$ istnieje dla każdego $v \in \mathbb{R}^2$ a funkcja $\mathbb{R}^2 \ni v \to f'_v(0,0) \in \mathbb{R}$ nie jest liniowa!

7. Pokazać, że funkcja $f(x,y) = (x-y^2)(3x-y^2)$ po obcięciu do dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$ ma mimimum lokalne w $(0,0)$. Czy f ma minimum lokalne w $(0,0)$? Wskazówka: można rozważyć obcięcie f do paraboli $2x = y^2$.

8. Funkcję $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ nazywamy p–jednorodną ($p \in \mathbb{R}$), jeżeli $f(t\mathbf{x}) = t^p f(\mathbf{x})$ dla dowolnych $t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$. Pokazać, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna i p–jednorodna, to $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = pf(\mathbf{x})$, a jej pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ są funkcjami $(p-1)$–jednorodnymi.