Analiza matematyczna dla ekonomistów, ćwiczenia siedemnaste, 2005/2006

Zdefiniujmy: $f_1(x,y,z) = 6x + 3y + 2z - 6$, $f_2(x,y,z) = -2x - y + z + 2$,
$f_3(x,y,z) = -x - 3y - 2z + 6$, $f_4(x,y,z) = -3x + y - z + 3$,

$A = \{(x,y,z): \quad f_1(x,y,z) = 0,\ f_2(x,y,z) \geq 0,\ f_3(x,y,z) \geq 0,\ f_4(x,y,z) \geq 0\}$,

$B = \{(x,y,z): \quad f_1(x,y,z) = 0,\ f_2(x,y,z) \leq 0,\ f_3(x,y,z) \geq 0,\ f_4(x,y,z) \geq 0\}$,

$C = \{(x,y,z): \quad f_1(x,y,z) \leq 0, f_2(x,y,z) \geq 0,\ f_3(x,y,z) \geq 0,\ f_4(x,y,z) \geq 0,\ x,y,z \geq 0\}$.

1. Wykazać, że A jest wielokątem wypukłym i znaleźć wszystkie jego wierzchołki.

2. Wykazać, że B jest nieograniczonym zbiorem wypukłym, którego "brzeg" (względem płaszczyzny $f_1 = 0$, a nie względem $\mathbb{R}^3$) składa się z pewnej liczby odcinków i półprostych.

3. Wykazać, że C jest wielościanem wypukłym i znaleźć jego wierzchołki.

4a. Zbadać ciągłość funkcji $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot M\mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$, gdzie M jest macierzą $k \times k$, zaś $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$.

4b. Zbadać ciągłość funkcji $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(\mathbf{x}) = \ln(1 + \|\mathbf{x}\|)$.

4c. Zbadać ciągłość funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określonej następująco:

$f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, jeżeli $xy \neq 0$ i $f(x,y) = 0$, jeśli $xy = 0$.

4d. Zbadać ciągłość odwzorowania $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określonego następująco:

$f(x,y,z) = \left(\dfrac{xy}{1+z^2}, \dfrac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$, jeżeli $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ i $f(0,0,0) = (0,0)$.

5. Niech $f(x,y) = x^y$ dla $x > 0$ i $y > 0$. Pokazać, że nie można określić funkcji w $(0,0)$ tak, aby była ona ciągła w tym punkcie.

6. Definiujemy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ następująco $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, gdy $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$. Pokazać, że obcięcie f do dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$ jest funkcją ciągłą na tej prostej, mimo że funkcja f nie jest ciągła w $(0,0)$.

7. Zbiór $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k: \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ nazywamy poziomicą (warstwicą) przechodzącą przez punkt $\mathbf{x}_0$ funkcji $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Pokazać, że poziomice funkcji ciągłej są domknięte w $\mathbb{R}^k$.

8. Zbiór $\Gamma_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l: \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\}$ nazywamy wykresem funkcji $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$. Pokazać, że jeżeli f jest ciągła, to wykres Γ_f jest domknięty w $\mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$. Podać przykład funkcji nieciągłej przynajmniej w jednym punkcie, której wykres jest zbiorem domkniętym.

9. Niech Ω_1 i Ω_2 będą zbiorami wypukłymi w $\mathbb{R}^k$. Pokazać, że dla dowolnych α, $\beta \in \mathbb{R}$ zbiór $\alpha\Omega_1 + \beta\Omega_2 = \{\alpha x + \beta y: \quad x \in \Omega_1,\ y \in \Omega_2\}$ jest wypukły.

10. Pokazać, że część wspólna dowolnie wielu zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

11. Niech A będzie macierzą $m \times n$ (tzn. macierz A ma m wierszy i n kolumn), a Ω zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że zbiór $A(\Omega) = \{A\mathbf{x}: \quad \mathbf{x} \in \Omega\}$ jest wypukły w $\mathbb{R}^m$.

12. Niech A będzie macierzą, która ma m wierszy i n kolumn, $b \in \mathbb{R}^m$. Pokazać, że zbiór $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \quad (A\mathbf{x})_i \leq b_i \quad \text{dla } 1 \leq i \leq m\}$ jest wypukły w $\mathbb{R}^n$.

13. Wykazać, że zbiór $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \quad z \geq x^2 + y^2\right\}$ jest wypukły.