Definicja normy

Normą na przestrzeni $\mathbb{R}^k$ nazywamy dowolną funkcję $\nu\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,+\infty]$ taką, że

1. $\nu(x) = 0 \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$,

2. $\nu(tx) = |t|\nu(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej t i każdego $x \in \mathbb{R}^k$ oraz

3. $\nu(x+y) \le \nu(x) + \nu(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^k$. ■

Definicja kuli w metryce indukowanej przez normę ν

Kulą *otwartą* o środku w punkcie $p \in \mathbb{R}^k$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór
$B(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^k\colon \quad \nu(x-p) < r\}$.
Kulą *domkniętą* o środku w punkcie $p \in \mathbb{R}^k$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór
$\overline{B}(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^k\colon \quad \nu(x-p) \le r\}$. ■

Definicja iloczynu skalarnego na $\mathbb{R}^k$

Iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^k$ nazywamy funkcję, która każdej parze wektorów $u, v \in \mathbb{R}^k$ przypisuje liczbę rzeczywistą $u \cdot v$ w taki sposób, że:

1. $u \cdot v = v \cdot u$ dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}^k$,

2. $(u_1 + u_2) \cdot v = u_1 \cdot v + u_2 \cdot v$ dla dowolnych $u_1, u_2, v \in \mathbb{R}^k$,

3. $(tu) \cdot v = t(u \cdot v)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej t i dowolnych $u, v \in \mathbb{R}^k$

4. $u \cdot u \ge 0$ dla dowolnego $u \in \mathbb{R}^k$, przy czym $u \cdot u = 0 \iff u_1 = u_2 = \ldots = u_k = 0$. ■

Mówimy, że norma ν pochodzi od iloczynu skalarnego $\cdot$ lub że jest indukowana przez iloczyn skalarny $\cdot$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wektora $u \in \mathbb{R}^k$ zachodzi: $\nu(u) = \sqrt{u \cdot u}$.

1. Dla $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ określmy: $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^k |x_i|$, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ oraz $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,k} |x_i|$.
Wykazać, że każda z tych funkcji jest normą na $\mathbb{R}^k$ oraz: $\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{x}\|_1 \le k \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty$. Niech $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_kv_k$. Wykazać, że ta funkcja jest iloczynem skalarnym i że od niego pochodzi norma $\|\mathbf{x}\|$, natomiast dwie pozostałe normy zdefiniowane w tym zadaniu nie pochodzą ani od tego iloczynu skalarnego, ani od żadnego innego (dla $k \ge 2$).

2. Narysować kule domknięte w R^2 o środku w $(0,0)$ i promieniu 1 w metrykach indukownych przez normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_\infty$.

3. Niech funkcja przypisująca wektorom $u, v \in \mathbb{R}^2$ liczbę $u \cdot v$ będzie iloczynem skalarnym. Dowieść, że istnieją liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$, takie że

$$u \cdot v = au_1v_1 + b(u_1v_2 + u_2v_1) + cu_2v_2 = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

przy czym $a > 0$ i $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$. Dowieść też, że funkcja, która przypisuje wektorom $u, v \in \mathbb{R}^2$ liczbę $(u_1, u_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, jest iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$ i $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$.

4. „Narysować” następujące zbiory (w odpowiedniej przestrzeni, R^2 lub R^3):

a. $\mathrm{A} = \{(x,y)\colon\ |x|-|y|\le 1\}$,

b. $\mathrm{B} = \{(x,y)\colon\ 0<x+y\le 1,\ y\ge x^2\}$,

c. $\mathrm{C} = \{(x,y)\colon\ 0<x+y\le 1,\ y\ge x^2+1\}$,

d. $\mathrm{D} = \{(x,y)\colon\ x^2+2x+y^2-4y\ge -1,\ 9x^2+16y^2\le 144\}$,

e. $\mathrm{E} = \{(x,y,z)\colon\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+2y+3z=6\}$,

f. $\mathrm{F} = \{(x,y,z)\colon\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+2y+3z<6\}$,

g. $\mathrm{G} = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2=4z^2,\ x^2+y^2+z^2=9\}$,

h. $\mathrm{H} = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2\le 4z^2,\ x^2+y^2+z^2\le 9\}$,

i. $\mathrm{I} = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2+z^2\le 9\}$,

j. $\mathrm{J} = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2\le 4,\ x^2+y^2+z^2\le 9\}$,

k. $\mathrm{K} = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2\le 4,\ x^2+y^2+z^2>9\}$,

l. $\mathrm{L} = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2<z,\ x^2+y^2+z^2\le 1\}$,

m. $\mathrm{M} = \{(x,y,z)\colon\ x^2-y^2=z,\ x^2+y^2+z^2\le 1\}$,

n. $\mathrm{N} = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2\le 4,\ x^2+y^2-z^2\le 1\}$,

o. $\mathrm{O} = \{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2\le 4,\ z^2-x^2-y^2\le 1\}$,

p. $\mathrm{P} = \{(x,y,z)\colon\ xy\le 0,\ x^2+z^2\le 1\}$

r. $\mathrm{R} = \{(x,y,z)\colon\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z<3\}$,

s. $\mathrm{S} = \{(x,y,z)\colon\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+2z\ge 6,\ x+y+z\le 6\}$,

t. $\mathrm{T} = \{(x,y,z)\colon\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge -6,\ x+y+2z\ge 6,\ x+y+z\le 6\}$,

u. $\mathrm{U} = \{(x,y,z)\colon\ |x|\le 1,\ |y|\le 1,\ |z|\le 1,\ x^2+y^2+z^2\ge 1\}$,

v. $\mathrm{V} = \{(x,y,z)\colon\ |x|\le 1,\ |y|\le 1,\ |z|\le 1,\ x^2+y^2+z^2>1\}$,

w. $\mathrm{W} = \{(x,y,z)\colon\ |x|\le 1,\ |y|\le 1,\ |z|\le 1,\ x^2+y^2+z^2=1\}$,

5. Ciągłość normy. Pokazać, że $\Big|\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\|\Big|\le\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

6. Wypukłość normy. Pokazać, że $\|\alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{y}\|\le\alpha\|\mathbf{x}\|+(1-\alpha)\|\mathbf{y}\|$ dla $0\le\alpha\le 1$. Pokazać, że kule $B(\mathbf{x}_0,r)$, $\overline{B}(\mathbf{x}_0,r)$ są zbiorami wypukłymi, niezależnie od tego jakiej normy używamy do ich zdefiniowania.

7. Wyjaśnić, które ze zbiorów zdefiniowanych w zadaniu 4 są otwarte, które domknięte, które ograniczone, które zwarte, które wypukłe, a które spójne.

Przypomnienia:

zbiór G jest *otwarty* $\Leftrightarrow$ dla każdego $p\in G$ istnieje $r_p>0$, takie że $B(p,r_p)\subset G$;

zbiór F jest *domknięty* $\Leftrightarrow$ zbiór $\mathbb{R}^k\setminus F$ jest otwarty $\Leftrightarrow$ z tego, że $p=\lim\limits_{n\to\infty}p_n$ i $p_n\in F$ dla każdego n, wynika, że również $p\in F$;

zbiór C jest *zwarty* $\Leftrightarrow$ z każdego ciągu punktów (p_n) należących do C można wybrać podciąg, który ma granicę *w zbiorze* C (jeśli $C\subset\mathbb{R}^k$, to C jest zwarty $\Leftrightarrow$ C jest domknięty i ograniczony);

C jest *niespójny* $\Leftrightarrow$ istnieją dwa zbiory otwarte G_1, G_2, takie że $G_1\bigcap C\ne\emptyset\ne G_2\bigcap C$, $G_1\bigcup G_2\supset C$ i $G_1\bigcap G_2\bigcap C=\emptyset$ (*otwarty* podzbiór $\mathbb{R}^k$ jest *spójny* $\Leftrightarrow$ każde dwa punkty tego zbioru można połączyć łamaną *zawartą w tym zbiorze*; dla zbiorów nieotwartych twierdzenie to jest nieprawdziwe, ze spójności nie wynika istnienie łamanych: okrąg jest spójny, choć nie zawiera żadnego odcinka, tym bardziej łamanej!).

Trzecia klasówka elementarna odbędzie się 29 marca w środę w czasie ćwiczeń. Tematyka: upraszczanie wyrażeń algebraicznych oraz wielomiany i równania wyższych stopni, zasady takie jak poprzednio.