Analiza matematyczna dla ekonomistów, ćwiczenia piętnaste, 2005/2006

1. Rozwinąć w szereg potęgowy o środku w punkcie x_0 funkcję f, jeśli $f(x) =$

a. $\sin 2x$ i $x_0 = 0$; **b.** $\sin^2 x$ i $x_0 = 0$; **c.** $\sin x$ i $x_0 = \pi$;

d. x^4 i $x_0 = 2$; **e.** e^x i $x_0 = 1$; **f.** $x \sin x$ i $x_0 = 0$;

g. $\frac{1}{(1-x)^3}$ i $x_0 = 0$; **h.** $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ i $x_0 = 0$; **i.** $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$ i $x_0 = 0$.

2. Obliczyć $f^{(1000)}(0)$, jeśli

a. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$; **b.** $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x-2))}$; **c.** $f(x) = e^{x^4}$.

3. Wiemy, że $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ dla $-1 < x \leq 1$. Niech $r_n(x)) = \ln(1+x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

a. Dla jakich n zachodzi $r_n(1) < 0$, a dla jakich $r_n(1) > 0$?

ą. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} |n r_n(1)| = \frac{1}{2}$.

b. Wykazać, że $|n r_n(\frac{1}{2})| < \frac{1}{2^n}$.

Uwaga: $\ln 2 = -\ln \frac{1}{2}$, więc można przybliżać liczbę $\ln 2$ korzystając z tej równości. To znacznie skuteczniejsza metoda od stosowania wzoru $\ln 2 = \ln(1+1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

c. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2} \left| r_n(1) + r_{n+1}(1) \right|$.

d. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór $\lim\limits_{x\to -1} |r_n(x)| = +\infty$.

4. Oszacować różnicę między funkcją $\sqrt{1+x}$ i jej wielomianem Taylora 2 stopnia o środku w punkcie $x_0 = 0$ na przedziale $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

5. Niech $a_0 = 1 = a_1$ oraz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla dowolnej liczby $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a. Wykazać, że dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ zachodzi nierówność $a_n \leq 2^n$.

b. Wykazać, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla każdej liczby $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

c. Niech $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Wykazać, że dla $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ jest spełniona równość: $f(x) = x f(x) + x^2 f(x) + 1$.

d. Wykazać, że $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$, następnie rozwinąć funkcję f w szereg Taylora o środku w punkcie $x_0 = 0$ i uzyskać wzór: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$.