1. Korzystając z wypukłości lub wklęsłości odpowiedniej funkcji wykazać, że:

(a) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x < \sin x < x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{4}$;

(b) $\operatorname{tg} x > 1 + \sqrt{2}(x - \frac{\pi}{4})$ dla $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$;

(c) $\ln x < -1 + \ln 10 + 0.1x$ dla $0 < x \neq 10$;

(d) $(1+x)^a \leq 1 + ax$ dla $a \in (0,1)$ i $x > -1$, wyjaśnić, dla jakich a, x zachodzi równość;

(e) $(1+x)^a \geq 1 + ax$ dla $a \notin (0,1)$ i $x > -1$, wyjaśnić, dla jakich a, x zachodzi równość;

(f) $\ln x < \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ dla $0 < x \neq 1$.

2. Korzystając z wypukłości lub wklęsłości odpowiedniej funkcji wykazać, że:

(a) $\frac{1}{2}(x^{100} + y^{100}) > (\frac{x+y}{2})^{100}$ dla $x \neq y$;

(b) $\sin \frac{x+y+z}{3} > \frac{1}{3}(\sin x + \sin y + \sin z)$ dla dowolnych $x, y, z \in [0, \pi]$, jeśli któreś dwie spośród liczb x, y, z są różne:

(c) spośród trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 największy obwód ma trójkąt równoboczny;

(d) spośród stukątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 największe pole ma stukąt foremny;

(e) $\operatorname{tg} \frac{x+y+z}{3} < \frac{1}{3}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)$ dla $x, y, z \in (0, \frac{\pi}{2})$, jeśli wśród liczb x, y, z są co najmniej dwie różne;

(f) spośród trójkątów opisanych na okręgu o promieniu 1 najmniejszy obwód ma trójkąt równoboczny;

(g) spośród stukątów opisanych na okręgu o promieniu 1 najmniejsze pole ma foremny;

(h) dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, z których przynajmniej dwie są różne, zachodzi nierówność

$$(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c})^{a+b+c} > a^a b^b c^c > (\frac{a+b+c}{3})^{a+b+c};$$

(i) $(3x + 2y) \cdot \operatorname{tg} \frac{3x+2y}{5} \leq 3x \cdot \operatorname{tg} x + 2y \cdot \operatorname{tg} y$ dla $0 \leq x, y < \frac{\pi}{2}$ oraz wyjaśnić, kiedy zachodzi równość;

(j) dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z zachodzi nierówność:

$$x \ln x + 2y \ln y + 3z \ln z + (x + 2y + 3z) \ln 6 \geq (x + 2y + 3z) \ln(x + 2y + 3z)$$

oraz wyjaśnić, kiedy zachodzi równość;

(k) jeśli $a, b > 0$, to $(2 - \sqrt{3})a^{2+\sqrt{3}} + (2 + \sqrt{3})b^{2-\sqrt{3}} \geq 4\sqrt[4]{ab}$, dla jakich a, b zachodzi równość?

3. Wykazać, że jeśli prosta ma trzy różne punkty wspólne z wykresem funkcji wypukłej f, to ma z tym wykresem wspólny odcinek i f nie jest funkcją ściśle wypukłą.

4. Wykazać, że dla dowolnych parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ równanie $\operatorname{tg} x = ax + b$ ma co najwyżej trzy różne rozwiązania w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Wykazać, że jeśli funkcja ściśle wypukła jest ciągła i *nie* jest monotoniczna, to ma wartość najmniejszą i ta najmniejsza wartość jest przyjmowana w dokładnie jednym punkcie, przy czym jest to punkt wewnętrzny dziedziny funkcji.

6. Wykazać, że jeśli funkcje f i g są wypukłe, funkcja g jest niemalejąca, to funkcja $g \circ f$ jest *wypukła*, jeśli natomiast g jest nierosnąca, to złożenie $g \circ f$ *może* być funkcją *wklęsłą*, *wypukłą* lub nawet mieć punkty przegięcia.

7. Wykazać, że jeśli funkcja f jest wypukła na każdym z przedziałów $[a, b]$ i $[b, c]$ oraz różniczkowalna w punkcie b, to jest wypukła na $[a, c]$. Podać przykład świadczący o tym, że bez założenia różniczkowalności teza nie jest prawdziwa.