To jest ostatnia seria zadań w 2005 r, do zrobienia już w przyszłym, powinno starczyć na dwa ćwiczenia, a może i na dłużej. **To jeden z najważniejszych tematów!** Zadania ilustrują zastosowanie pochodnej do badania funkcji i znajdowania ekstremów lokalnych i absolutnych. Studenci powinni postarać się rozwiązać samodzielnie wszystkie te zadania, które nie zostaną przerobione w czasie ćwiczeń. Zadania „tekstowe” koniecznie należy przeczytać i zrozumieć (nawet nie rozwiązując) przed ćwiczeniami, bo inaczej można mieć sporo kłopotów ze zrozumieniem i to takich, których można dosyć łatwo uniknąć.

1. Jaki jest minimalny czas dojścia do domu stojącego przy prostoliniowej szosie w odległości 13 km od miejsca, w którym się znajdujemy, jeśli odległość od szosy wynosi 5 km, w terenie poruszamy się z prędkością 3km/h, zaś po szosie – z prędkością 5 km/h.

2. Znaleźć maksimum:

a. objętości brył powstałych w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o obwodzie 1 wokół przeciwprostokątnej;

b. objętości stożka wpisanego w kulę o promieniu 1;

c. obwodu trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 1;

d. długości statku, który może wpłynąć z kanału o szerokości $a > 0$ do prostopadłego doń kanału, którego szerokość jest równa $b > 0$;

e. pola trójkąta o obwodzie 3 - można skorzystać z wzoru Herona;

f. wyrazu ciągu (a_n), jeśli $a_n = n^5 2^{-n}$ dla $n = 1, 2, 3...$;

g. wyrazu ciągu (a_n), jeśli $a_n = n^5 3^{-n}$ dla $n = 1, 2, 3...$

3. Ciężarówka porusza się po autostradzie ze stałą prędkością v km/h. Minimalna prędkość dla ciężarówek na autostradzie wynosi 50 km/h, maksymalna 100 km/h, litr benzyny kosztuje 2 zł, kierowca otrzymuje 10 zł za godzinę swej pracy. Ciężarówka zużywa $11+\frac{v^2}{400}$ litrów paliwa w ciągu godziny jazdy (z prędkością v). Przy jakiej prędkości koszt przejazdu ustalonego odcinka trasy jest najmniejszy?

4. Zbadano, że w pewnej fabryce robotnik rozpoczynający pracę o godzinie $8{:}00$ wykonuje w ciągu x godzin $-x^3 + 6x^2 + 15x$ radioodbiorników. Po 15–minutowej przerwie wykonuje w ciągu x godzin $-\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 23x$ radioodbiorników. O której powinna rozpocząć się 15–minutowa przerwa, aby do $12{:}15$ wykonał najwięcej radioodbiorników, a której – by wykonał ich najmniej?

5. Statek pływa z portu A do portu B. Koszt ruchu statku składa się z dwu części: niezależnej od prędkości i równej 25600 zł dziennie oraz zależnej od prędkości i równej (liczbowo) podwojonemu sześcianowi prędkości dziennie. Przy jakiej prędkości koszt przepłynięcia trasy jest najmniejszy?

6. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f, jeśli $f(x) =$

a. $\left|x^2 + 2x - 3\right| + \frac{3}{2}\ln x$ na przedziale $[\frac{1}{2}, 2]$;

b. $e^{\sqrt{x^2\cdot|x+1|}}$ na przedziale $[-2, 1]$;

c. $f(x) = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x$ na przedziale $[\pi, 2\pi]$;

d. $f(x) = -x^2$ dla $-1 \le x \le 0$;

e. $f(x) = 2ex\ln x$ dla $0 < x \le 2$.

7. Ile pierwiastków ma równanie:

a. $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$;

b. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$;

c. $x^5 - 5x = a$ w zależności od $a \in \mathbb{R}$;

d. $e^x = ax^2$ w zależności od $a \in \mathbb{R}$.

8. Znaleźć przedziały monotoniczności oraz wypukłosci lub wklęsłości funkcji f, jej lokalne ekstrema i punkty przegięcia. Znaleźć granice funkcji f oraz granice funkcji f' w końcach przedziałów składających się na ich dziedziny (niekoniecznie takie same). Naszkicować wykres funkcji* f, jeśli $f(x) =$

a. $x^4(1+x)^{-3}$; b. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; c. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$;

d. $1-x+\sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}$; e. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; f. $\sin x \sin 3x$;

g. $(x+1)^{5/3}\left(x^2+2x\right)^{1/3}$.

Wiemy, że $f'(x) = \dfrac{1}{3}(x+1)^{2/3}\left(x^2+2x\right)^{-2/3}\left(7x^2+14x+2\right)$, niewymiernymi pierwiastkami funkcji f' są $x_5 \approx -1.845$ oraz $x_6 \approx -0.155$, ma ona również pierwiastek wymierny, $f''(x) = \dfrac{2}{9}(x+1)^{-1/3}\left(x^2+2x\right)^{-5/3}\left(14x^4+56x^3+61x^2+10x-4\right)$, pierwiastkami drugiej pochodnej są $x_1 \approx 0.177$, $x_2 \approx -2.177$, $x_3 \approx -0.492$, $x_4 \approx -1.508$, są one niewymierne.

h. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x-7}}{\sqrt[3]{x^2+2x-5}}$. Wiadomo, że $f'(x) = \dfrac{4}{3}(x+1)\left(x^2+2x-5\right)^{-\dfrac{4}{3}}\left(x^2+2x-7\right)^{-\dfrac{2}{3}}$,

$f''(x) = -\dfrac{4}{9}\left(9x^4+36x^3+8x^2-56x-181\right)\left(x^2+2x-5\right)^{-\dfrac{7}{3}}\left(x^2+2x-7\right)^{-\dfrac{5}{3}}$

oraz że pierwiastkami (jednokrotnymi) drugiej pochodnej są liczby $x_1 \approx 1.7$ oraz $x_2 \approx -3.7$, innych pierwiastków rzeczywistych funkcja f'' nie ma.

i. $\dfrac{x^3-5x}{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^3}$. Wiadomo, że zachodzą równości:

$f'(x) = \dfrac{25(x-1)(x+1)}{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^5}$ oraz $f''(x) = \dfrac{-75x(x^2-5)}{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^7}$.

9. Obliczyć granicę:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ b. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ c. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\operatorname{tg} x - \sin x)}{\left(-\ln(\cos x)\right)^a}$ e. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1000}(1.001)^{-x}$ f. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-(\cos x)^{\sin x}\right)^2}{(\operatorname{tg} x)^6}$

10. Znaleźć dokładną (czyli najmniejszą) stałą Lipschitza dla funkcji f na przedziale P, jeśli:

a. $f(x) = e^x$, $P = [0, 10]$, b. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $P = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, c. $f(x) = \ln x$, $P = [2, \infty]$,

d. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $P = [1, \infty)$, e. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $P = R$, f. $f(x) = x^2$, $P = [100, 1000]$.

11. Dowieść, że jeśli $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, to $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geq |x-y|$ przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$.

---

* **UWAGA:** Zakładamy, że dziedziny funkcji są tak dobrane, że operacje definiujące funkcję są wykonalne oraz że dziedziny są maksymalnymi zbiorami o tej własności. Pierwiastki stopnia *nieparzystego* są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x.