1. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeśli

(a) $f(x) = \cos^2 x - 2\sin x$, $x_0 = \pi$; (b) $f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$, $x_0 = 0$;

(c) $f(x) = |x-1|\sqrt[3]{x+2}$, $x_0 = -3$; (d) $f(x) = \left(x^2-1\right)^2$, $x_0 = 0$;

(e) $f(x) = \left(x^2-1\right)^2$, $x_0 = \sqrt{2}$; (f) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$;

(g) $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1}$, $x_0 = 0$; (h) $f(x) = \sqrt{1-\cos\left(x\sqrt{2}\right)}$, $x_0 = 0$;

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x - \sin x}$, $x_0 = 0$; (j) $f(x) = \ln(\cos x)$, $x_0 = 0$;

lub wykazać, że w podanym punkcie wykres funkcji f nie ma stycznej.

2. W oparciu o twierdzenie znane z wykładu dowieść, że funkcja f określona na wskazanym przedziale ma funkcję odwrotną f^{-1}, znaleźć dziedzinę funkcji f^{-1} oraz $(f^{-1})'(y_0)$, jeśli $f(x) =$

(a) $x^3 + 3x$ dla $x \in (-\infty, +\infty)$, $y_0 = 0$, (b) $x + e^x$ dla $x \in (-\infty, +\infty)$, $y_0 = 1$,

(c) $x + \ln x$ dla $x \in (0, +\infty)$, $y_0 = 1$

3. Elastycznością $E_p(f)$ funkcji f różniczkowalnej w punkcie p, której wartość w punkcie p jest różna od 0 ($f(p) \neq 0$), ekonomiści nazywają liczbę $p\frac{f'(p)}{f(p)}$. Zachodzi *przybliżona* równość: $f(p+sp) \approx$ $\approx f(p) + f'(p)sp$, więc również $\frac{f(p+sp)-f(p)}{f(p)} \approx \frac{spf'(p)}{f(p)} = s\frac{pf'(p)}{f(p)}$. Można ją interpretować np. tak: lewa strona to względny przyrost wartości funkcji f odpowiadający zmianie argumentu p o wielkość $s \cdot p$, współczynnik s odpowiada procentowej zmianie argumentu p (jeśli zmieniamy p o -5%, to $s = -\frac{1}{20}$), licznik $spf'(p)$ strony prawej to przybliżona zmiana wartości funkcji f odpowiadająca zmianie argumentu p o sp. Obliczyć elastyczność funkcji f w punkcie $x > 0$, jeśli

(a) $f(x) = e^x$, (b) $f(x) = e^{-x}$, (c) $f(x) = cx^\alpha$, (d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

4. Przyjmijmy, że popyt D na pewien towar jest odwrotnie proporcjonalny do ceny p tego towaru. Wyznaczyć elastyczność popytu D jako funkcji ceny p. O ile procent zmaleje popyt na ten towar w wyniku wzrostu ceny o 1%?

5. Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x, że $f(x) \neq 0 \neq g(x)$ i $t \in R$. Wykazać, że:

(a) $E_x(fg) = E_x(f) + E_x(g)$, (b) $E_x\left(\frac{f}{g}\right) = E_x(f) - E_x(g)$,

(c) $E_x(f+g) = \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}E_x(f) + \frac{g(x)}{f(x)+g(x)}E_x(g)$, (d) $E_x(tf) = E_x(f)$.

6. Załóżmy, że przy cenie p popyt na czekoladę ze strony ludności wiejskiej jest trzykrotnie mniejszy od popytu ze strony ludności miejskiej oraz że jego elastyczność w przypadku wsi jest równa $-0{,}8$, zaś w przypadku miasta $-0{,}3$. O ile procent w przybliżeniu zmniejszy się globalny popyt na czekoladę w wyniku wzrostu ceny o 1%?

7. Niech $C(q)$ oznacza koszt produkcji q szaf, a $c(q) = \frac{C(q)}{q}$ — średni koszt produkcji jednej szafy. Załóżmy, że funkcję C przedłużono na półprostą $(0, \infty)$ i że jest ona na tej półprostej różniczkowalna. Wykazać, że koszt krańcowy, tj. $C'(q)$ jest równy $c(q)\big(1 + E_q(c)\big)$.