Analiza matematyczna dla ekonomistów, ćwiczenia dziesiąte, 20054/2006

1. Wykazać, że jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, jest ciągła, to jej zbiór wartości: $\{f(x)\colon \quad x \in [a,b]\}$ jest przedziałem domkniętym, być może zdegenerowanym do jednego punktu.

2. Czy istnieje funkcja ciągła $f : (a,b] \to R$, $a < b$, której zbiór wartości $\{f(x)\colon \quad x \in (a,b]\}$ jest:

(a) zbiorem jednopunktowym,
(b) zbiorem dwupunktowym,
(c) równy $(1,2) \bigcup (3,4)$,
(d) równy $(1,2) \bigcup (2,4)$,
(e) równy $(1,2)$,
(g) równy $(1,2]$,
(h) równy $[10,12]$,
(i) równy $(-\infty,\infty)$,
(j) zbiorem wszystkich liczb wymiernych,
(k) równy $(-\infty,2]$,
(l) równy $(1,\infty)$,
(ł) równy $[1,2)$.

Jakie będą odpowiedzi na powyższe pytania, jeśli dziedziną funkcji będzie przedział otwarty (a,b), a nie przedział otwarto-domknięty $(a,b]$?

3. Wykazać, że funkcja ciągła na przedziale, której wszystkie wartości są niewymierne, jest stała.

4. Korzystając jedynie z definicji pochodnej oblicz $f'(p)$, przy czym $f(p)$ jest tak określone, że f jest ciągła w punkcie p , jeśli

(a) $f(x) = x^2 \cos x$, $p = 0$;
(b) $f(x) = xe^x$, $p = 0$;
(c) $f(x) = x(x-1)$, $p = 0$;
(d) $f(x) = x(x-1)$, $p = 1$;
(e) $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $p = 0$;
(f) $f(x) = (x-1)e^x$, $p = 1$;
(g) $f(x) = x\sqrt{1 + \sin(\operatorname{tg} x)}$, $p = 0$;
(h) $f(x) = \sin\left(x\sqrt{1 + \sin(\operatorname{tg} x)}\right)$, $p = 0$;
(i) $f(x) = (x-2)\,|x+3|$, $p = 2$;
(j) $f(x) = (\ln x)\sqrt{1 + 3x^2}$, $p = 1$.

5. Obliczyć pochodną funkcji f w tych punktach, w których f' istnieje, jeśli $f(x) =$

(a) $1 - 3x + 7x^2 + 5x^3$,
(b) $\sqrt{1+x}$,
(c) $\frac{2x}{1+x^2}$,
(d) $\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$,
(e) $\arccos(\sin x)$,
(f) $\frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}$,
(g) $x^{\sqrt{3}}$,
(h) $\sin\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$,
(i) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$,
(j) x^x,
(k) $\sqrt{\operatorname{tg} x}$,
(l) e^{-x^2},
(m) $e^{\sin x}$,
(n) $\sqrt{x + \sqrt{2x + \sqrt{3x}}}$,
(o) $\ln|x|$,
(p) $\sin^2 x$,
(q) $|\sin x|$,
(r) $\ln|\sin x|$,
(s) $x\,|x|$,
(t) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$,
(u) $\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

---

10 grudnia, 8:30–11:00 egzamin: ciągi i szeregi

Osoby których nazwiska zaczynają się od **A do Kru** *piszą w sali w „starym” BUW-ie na Krakowskim Przedmieściu,*

osoby o nazwiskach zaczynających się od **Krz do Ż** *w budynku Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki przy ul. Banacha 2, wejście od ul. Pasteura.*