

## Analiza matematyczna dla ekonomistów, ćwiczenia pierwsze, 2004/2005

0. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  i dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$  zachodzą równości:
  - (i)  $(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$ , gdzie
$$\binom{c}{k} = \frac{c(c-1)(c-2)\dots(c-(k-1))}{k!}$$
dla każdej liczby rzeczywistej  $c$  i  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ,
  - (ii)  $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ .
  - (iii)  $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$ .
1. Niech wyrazy ciągu  $(a_n)$  spełniają równanie:  $a_{n+1} = qa_n$ . Wykazać, że  $a_n = a_1q^{n-1}$  dla dowolnej liczby naturalnej  $n$ . Udowodnić, że dla  $q \neq 1$  zachodzi wzór  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ .
2. Zapisać liczbę  $0.12345123451234512345\dots = 0,(12345)$  jako iloraz dwu liczb całkowitych.
3. Co jest większe: liczba 1 czy liczba  $0,99999\dots = 0,(9)$ ? – odpowiedź dokładnie uzasadnić.
4. Wykazać, że jeśli dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzi równość  $a_{n+1} = qa_n + p$ , gdzie  $p$  oraz  $q$  są dowolnymi, niezależnymi od  $n$  liczbami rzeczywistymi, to dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzi równość  $a_n = \frac{p}{1-q} + (a_1 - \frac{p}{1-q})q^{n-1}$ . W szczególności, jeśli  $a_1 = \frac{p}{1-q}$ , to wyraz ciągu  $(a_n)$  jest niezależny od  $n$  (ten ciąg stały nazywany jest przez ekonomistów punktem równowagi równania  $a_{n+1} = qa_n + p$ ).
5. Paliwo drożało 10 razy, za każdym razem o 3%. Oszacować (w procentach) wzrost ceny paliwa po 10 podwyżkach z dokładnością do 0,1 punktu procentowego.
6. Z funduszu wynoszącego 1000000 (milion) złotych, umieszczonego na rachunku bankowym o oprocentowaniu 5% w skali rocznej, wypłaca się stypendia w łącznej kwocie 300000 złotych. Stypendia są wypłacane pod koniec roku, po doliczeniu odsetek; pierwsza wypłata ma miejsce po pierwszym roku. Po jakim czasie fundusz wyczerpie się? Po jakim czasie fundusz wyczerpałby się, gdyby wypłaty były dziesięciokrotnie mniejsze, tj. równe 30000 złotych?
7. (Model rynku jednego towaru, tzw. model pajęczynowy, ang: cobweb model). Niech  $P_t$  oznacza cenę towaru w chwili  $t$ ,  $D_t$  popyt na ten towar w chwili  $t$ , a  $S_t$  – podaż tego towaru w chwili  $t$ . Załóżmy, że dla każdej nieujemnej liczby całkowitej  $t$  i pewnych, niezależnych od  $t$ , dodatnich liczb  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  spełnione są równości:  $S_t = D_t$ ,  $D_t = \alpha - \beta P_t$ ,  $S_{t+1} = \gamma + \delta P_t$ . Pierwsze z tych równań oznacza, że producent wytwarza tyle towaru, ile może sprzedać przy danej cenie  $P_t$ , z drugiego wynika, że popyt maleje w wyniku wzrostu ceny, zaś z trzeciego możemy wywnioskować, że producent zwiększa podaż, gdy cena wzrasta. Wyprowadzić wzory na  $P_t$  oraz  $S_t$  w zależności od  $t$  oraz stałych  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Wyjaśnić, co się dzieje z podażą i popytem w tym modelu w czasie, tj. gdy  $t$  wzrasta. Omówienie opisywanego tu modelu rynku można znaleźć w książce A.Ostoi–Ostaszewskiego „Matematyka w ekonomii. Modele i metody”, PWN, 1996, tom 1 str. 101-103, lub w książce A.C.Chianga „Podstawy ekonomii matematycznej”, PWE, 1994, str. 559-562.
8. W kraju dotkniętym ostrym kryzysem inflacja wynosi 5% miesięcznie. Oblicz wskaźnik inflacji rocznej z dokładnością do 1%. Do oszacowania można użyć dwumian Newtona.
9. Zakładając, że średni przyrost naturalny na Ziemi równy jest 1,3% rocznie obliczyć po jakim czasie liczba ludzi na planecie się podwoi.