

Seria 9. Mocne prawo wielkich liczb

Rodzaje zbieżności zmiennych losowych

Możemy wyróżnić trzy rodzaje zbieżności zmiennych losowych:

- Zbieżność prawie na pewno: $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X \iff \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$.
- Zbieżność według prawdopodobieństwa: $X_n \xrightarrow{\text{P}} X \iff \forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$.
- Zbieżność według p -tego momentu ($p > 0$): $X_n \xrightarrow{L_p} X \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}|X_n - X|^p = 0$.

Twierdzenie 1 *Zachodzą następujące relacje pomiędzy zmiennymi rodzajami zbieżności:*

- Zbieżność p.n. implikuje zbieżność według P: $X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{P}} X$.
- Zbieżność według P, implikuje istnienie podciągu zbieżnego p.n.: $X_n \xrightarrow{\text{P}} X \Rightarrow \exists (n_k) X_{n_k} \xrightarrow{\text{p.n.}} X$.
- Zbieżność L_p implikuje zbieżność według P: $X_n \xrightarrow{L_p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{P}} X$.
- Zbieżność według P ani zbieżność L_p nie implikują zbieżności p.n..
- Bez dodatkowych założeń zbieżność p.n. ani zbieżność P nie implikują zbieżności L_p .

Twierdzenie 2 *Prawo 0 – 1 Kołmogorowa. Jeśli zmienne losowe X_n są niezależne, a zdarzenie A jest mierzalne względem każdego σ -ciała ogonowego (tj. $\sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \dots)$, gdzie $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$), to $\mathbf{P}(A) = 0$ lub $\mathbf{P}(A) = 1$. W ludzkim języku oznacza to, że zdarzenie A zależące jedynie od dowolnie dalekich zmiennych X_n jest albo pewne albo niemożliwe.*

Zad 1 *Udowodnij prawo 0 – 1 Kołmogorowa.*

Zad 2 *Pokaż, że dla ciągu zmiennych niezależnych albo z p -stwem równym 1 istnieje granica ciągu $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, albo z p -stwem równym 1 ta granica nie istnieje.*

Prawa wielkich liczb

Najważniejszym twierdzeniem klasycznego rachunku prawdopodobieństwa jest

Twierdzenie 3 *Jeśli X_n stanowią ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (tj. $\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}X_2 = \dots < \infty$), to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \mathbf{E}X_1 \text{ p.n.}$$

Zad 3 *Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Jeśli zdefiniujemy dystrybucję empiryczną wzorem $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{X_i \leq t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, to dla każdego $t \in \mathbb{R}$ $F_n(t) \xrightarrow{\text{p.n.}} F_{X_1}(t)$.*

Zad 4 *Chcemy sprawdzić poprawność pracy magisterskiej. Losujemy 10 stron ze 100 stronicowej pracy studenta i liczymy wszystkie błędy, które są w nich zawarte. Ustalamy, że praca jest do poprawki jeśli student popełnia błąd z prawdopodobieństwem większym lub równym 0.1 na stronie. Przypuśćmy, że znaleźliśmy dwa błędy, co zrobić z pracą? Ilu błędów możemy się spodziewać w całej pracy?*

Zad 5 *Przypuśćmy, że dwóch recenzentów przeczytało pracę magisterską. Jeden znalazł 91 błędów drugi 53, a błędów znalezionych wspólnie było 39. Następnie promotor dostał zawału. Dlaczego?*

Zad 6 *Losujemy 1000 liczb z przedziału $[0, 1]$. Ilu liczb powinniśmy się spodziewać, które na 10 miejscu w rozwinięciu dziesiętnym mają cyfrę zero?*

Zad 7 Przypuśćmy, że student z p -stwem 0.8 zalicza sesję. Jeśli na III rok zakwalifikowano 200 osób, to ile musiało być studentów na II roku?

Zad 8 Przypuśćmy, że na zmianę rzucamy kostką na której wypada $\{1, \dots, 6\}$ i monetą na której uzyskujemy $\{-1, 1\}$. Jakiej średniej sumy wyników (tj. podzielonej przez liczbę rzutów) powinniśmy się spodziewać po bardzo wielu rzutach?

Zad 9 Z ćwiczeń z RP studenci dostają 2 z p -stwem 0.4, 3 z p -stwem 0.3, 4 z p -stwem 0.2 i 5 z p -stwem 0.1. Mamy 30 studentów, których wyniki są niezależne. Z uzyskanych wartości wyciągamy średnią geometryczną (tj. mnożymy i podnosimy do potęgi $1/30$). Jakiego wyniku możemy się spodziewać?

Zad 10 Dwaj studenci niezależnie rozwiązywali zadania na egzaminie z RP. Jeden rozwiązał 5 zadań drugi 8 zadań, a wspólnie rozwiązali 3. Oblicz p -stwo p i q z jakim odpowiednio pierwszy, drugi student dobrze rozwiązuje pojedyncze zadanie. Jakie oceny powinniśmy im wystawić?

Zad 11 Obliczyć granice

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \dots \int_0^1 \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 f([x_1 \dots x_n]^{1/n})$.

Zad 12 Niech $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Niech $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją mierzalną, $Z_i = 1_{\{f(X_i) > Y_i\}}$. Pokaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_n = \int_0^1 f(x) dx \text{ p.n.}$$

Mówimy, że ciąg zmiennych X_n spełnia MPWL jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{n} = 0, \text{ p.n., } S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Mówimy, że ciąg zmiennych X_n spełnia SPWL jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{n} = 0, \text{ P, } S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Zad 13 Pokaż, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D^2 S_n}{n^2} = 0$ lub X_n zmienne nieskorelowane o wspólnie ograniczonym drugim momencie, to ciąg X_n spełnia SPWL.

Zad 14 Znaleźć warunek konieczny i dostateczny, żeby ciąg niezależnych zmiennych o rozkładzie

$$\mathbf{P}(X_n = n + 1) = \mathbf{P}(X_n = -n - 1) = p_n, \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p_n$$

spełniał MPWL.

Zad 15 Niech X_n będą zmiennymi losowymi niezależnymi, dla których

$$\mathbf{P}(X_n = n + 1) = \mathbf{P}(X_n = -n - 1) = \frac{1}{2(n + 1) \log(n + 1)}, \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{(n + 1) \log(n + 1)}.$$

Pokaż, że zmienne X_n spełniają SPWL ale nie spełniają MPWL.