Seria 7. Rozkłady prawdopodobieństwa

Definicja 1 *Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy $\mathbf{E}X := \int_\Omega X(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} x\mu_X(dx)$. W przypadku zmiennej losowej dyskretnej $\mathbf{E}X = \sum_{x\in S} x\mu_X(\{x\})$, gdzie S jest przeliczalnym zbiorem wartości $\mu_X(S) = 1$. W przypadku zmiennej losowej ciągłej o gęstości $f(x)$ mamy $\mathbf{E}X = \int_\mathbb{R} xf(x)dx$.*

Definicja 2 *Wariancją zmiennej losowej X nazywamy*

$$\mathbf{V}arX = \mathbf{D}^2X := \int_\Omega [X(\omega) - \mathbf{E}X]^2\mathbf{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} [x - \mathbf{E}X]^2\mu_X(dx)$$

W przypadku zmiennej losowej dyskretnej $\mathbf{D}^2X = \sum_{x\in S}(x - \mathbf{E}X)^2\mu_X(\{x\})$. W przypadku zmiennej losowej ciągłej o gęstości $f(x)$ mamy $\mathbf{D}^2X = \int_\mathbb{R}(x - \mathbf{E}X)^2 f(x)dx$.

Definicja 3 *Zmienne $X_1, ..., X_n$ określone na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ nazywamy niezależnymi jeśli*

$$\mathbf{P}(X \in B_1, ..., X \in B_n) = \mathbf{P}(X \in B_1)...\mathbf{P}(X \in B_n), \ \ \forall\, B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

W przypadku zmiennych dyskretnych $X_1, ..., X_n$ o przeliczalnych zbiorach wartości $S_1, ..., S_n$ oznacza to, że $\mathbf{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1)...\mathbf{P}(X_n = x_n)$, dla każdego $x_1 \in S_1, ..., x_n \in S_n$. W przypadku zmiennych ciągłych $X_1, ..., X_n$ o gęstościach $f_1, ..., f_n$, zmienne $X_1, ..., X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy zmienna $(X_1, ..., X_n)$ ma rozkład ciągły z gęstością

$$f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1)...f_n(x_n), \ \ x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 1 *Dla dowolnych zmiennych $X_1, ..., X_n$, $\mathbf{E}(X_1 + ... + X_n) = \mathbf{E}X_1 + ...\mathbf{E}X_n$. Jeśli zmienne $X_1, ..., X_n$ są niezależne, to $\mathbf{D}^2(X_1 + ... + X_n) = \mathbf{D}^2X_1 + ... + \mathbf{D}^2X_n$.*

Zad 1 *Udowodnij, że $\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2$. Zauważ, że $\mathbf{D}^2X = \mathbf{D}^2(X - \mathbf{E}X)$.*

Zad 2 *Przykład, że Twierdzenie 1 przydaje się. Niech X oznacza sumę oczek uzyskaną w stukrotnym rzucie kostką. Pokaz, że $\mathbf{E}X = 350$.*

Zad 3 *Niech X ma rozkład jednopunktowy δ_a zadany wzorem $\mathbf{P}(X = a) = 1$. Pokaż, że $\mathbf{E}X = a$, $\mathbf{D}^2X = 0$.*

Zad 4 *Niech X ma rozkład Bernouliego $\mathcal{B}(n, p)$ zadany wzorem $\mathbf{P}(X = k)\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$, $p + q = 1$. Pokaz, że $\mathbf{E}X = np$, $\mathbf{D}^2X = npq$.*

Zad 5 *Wykonujemy doświadczenia Bernouliego, aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech X oznacza liczbę wykonanych doświadczeń. Pokaż, że $\mathbf{E}X = 1/p$, $\mathbf{D}^2X = q/p^2$.*

Zad 6 *Przypuśćmy, że zmienna losowa ma rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$ zadany wzorem $\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 1, 2, .., \lambda > 0$. Pokaż, że $\mathbf{E}X = \lambda$, $\mathbf{D}^2X = \lambda$.*

Zad 7 *Niech X ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[a, b]$ na przedziale $[a, b]$, o gęstości $g(x) = \frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x)$. Pokaz, że $\mathbf{E}X = \frac{a+b}{2}$, $\mathbf{D}^2X = \frac{(b-a)^2}{2}$.*

Zad 8 *Niech zmienna X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}(\lambda)$ o gęstości $g(x) = \lambda e^{-\lambda}1_{(0,\infty)}(x)$, $\lambda > 0$. Pokaż, że $\mathbf{E}X = 1/\lambda$, $\mathbf{D}^2X = 1/\lambda^2$.*

Zad 9 *Niech zmienna X ma rozkład gamma $\gamma_{a,b}$ o gęstości $g(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}1_{(0,\infty)}(x)$. Pokaż, że $\mathbf{E}X = a/b$, $\mathbf{D}^2X = a/b^2$.*

Zad 10 *Niech zmienna X ma rozkład gaussowski $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ o gęstości $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.. Pokaż, że $\mathbf{E}X = m$, $\mathbf{D}^2X = \sigma^2$.*

Zad 11 *Pokaż, że jeśli zmienna losowa* X *ma rozkład ciągły o gęstości* f *wówczas* $F'_X(t) = f(t)$.

Zad 12 *Znajdź dystrybuantę rozkładu geometrycznego* $\mathbf{P}(X = k) = pq^{k-1}$, *rozkładu jednostajnego* $\mathcal{U}[a, b]$ *oraz rozkładu wykładniczego* $\mathcal{E}(\lambda)$.

Zad 13 *Pokaż, że jeśli* $a, b \in \mathbb{R}$ *oraz* $Z = aX + bY$, *to zachodzi wzór* $\mathbf{E}Z = a\mathbf{E}X + b\mathbf{E}Y$. *Pokaż, że jeśli* X, Y *niezależne, to* $\mathbf{D}^2Z = a^2\mathbf{D}^2X + b^2\mathbf{D}^2Y$.

Zad 14 *Rzucamy kostką tak długo, aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby rzutów.*

Zad 15 *Pokaż, że jeśli* X *jest zmienną losową o wartościach w* $\mathbb{N}$, *to* $\mathbf{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > n)$. *Można wykazać, że jeśli* $X \geqslant 0$, *to* $\mathbf{E}X = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(X > x)d(x)$.