Seria 6. Zmienne losowe

Definicja 1 *Niech* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *będzie przestrzenią probabilistyczną. Odwzorowanie* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *nazywamy zmienna losową o wartościach w* R^n*, jeśli dla każdego* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *zbiór* $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$*.*

Definicja 2 *Rozkładem prawdopodobieństwa na* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy dowolną miarę probabilistyczną* μ *(to znaczy* $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$*) na* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$*.*

Definicja 3 *Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej* X *o wartościach w* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy rozkład prawdopodobieństwa* μ_X *określony na* $(R^n, \mathcal{B}(R^n))$ *zależnością*

$$\mu_X(B) = \mathbf{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(R^n).$$

Istnieją dwa podstawowe rodzaje rozkładów.

Definicja 4 *Rozkład* μ *na* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy dyskretnym, jeśli istnieje przeliczalny podzbiór* $S \subset \mathbb{R}^n$ *taki, że* $\mu(S) = 1$*.*

Definicja 5 *Rozkład* μ *na* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy ciągłym, jeśli dla pewnej funkcji* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, całkowalnej mamy*

$$\mu(A) := \int_A f(x)\mu(dx), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Wprowadzamy użyteczne pojęcie dystrybuanty.

Definicja 6 *Dystrybuantą rozkładu* μ *na* $\mathbb{R}$ *nazywamy funkcję* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadaną wzorem* $F(t) := \mu((-\infty, t])$*. Jeśli rozkład wyznaczony jest przez zmienną losową* X *dystrybuantę nazywamy* F_X*.*

Zad 1 *Wykonujemy doświadczenia Bernouliego, aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech* X *oznacza liczbę wykonanych doświadczeń. Wyznacz rozkład* X*, wyznacz dystrybuantę* F_X*.*

Zad 2 *Losujemy punkt z odcinka* $[0, 1]$*. Wylosowaną wartość oznaczamy przez* X*. Znajdź rozkład i dystrybuantę zmiennej losowej* X*.*

Zad 3 *Rzucamy dwiema kostkami. Niech* X *będzie większą z liczb uzyskanych na poszczególnych kostkach. Obliczyć* $\mathbf{P}(X \in [2, 4])$*.*

Zad 4 *Niech* $\Omega = [0, 1]$*,* $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ *i prawdopodobieństwem zadanymi przez miarę Lebsgue'a* $|\cdot|$*. Znajdź* $\mathbf{P}(X \in [0, \frac{1}{2}))$*, gdzie* $X(\omega) = \omega^2$*.*

Zad 5 *Niech* X *będzie czasem oczekiwania na pierwszego orła w rzucie monetą. Znaleźć* $P(X \in 2\mathbb{N})$*, gdzie* $2\mathbb{N} = \{2n : \ n = 1, 2, 3, ...\}$*.*

Zad 6 *Dystrybunata rozkładu* μ *dana jest wzorem*

$$F_\mu = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0.1 + x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < 0.5, \\ 0.4 + x & \text{dla} \quad 0.5 \leqslant x < 0.55, \\ 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 0.55. \end{cases}$$

Wyznaczyć $\mu(\frac{1}{2})$*,* $\mu([0, \frac{1}{2}])$*,* $\mu((0, 0.55))$*.*

Zad 7 *W Szuflandii najniższa płaca wynosi* 1000*, a maksymalna* 50000*. Szansa, że dostaniemy więcej niż* x*,* $x \in (1000, 50000)$ *wynosi* $\frac{(x-50000)(x+48000)}{-49000^2}$*. Znajdź gęstość tego rozkładu.*

Zad 8 *Niech* $\Omega = [0, 1]$ *z miarą Lebesgue'a,* $X(\omega) = 2\omega - 1$*. Policz dystybuantę.*

Zad 9 *Przypuśćmy, że* $F(t) = 0$ *dla* $t \leqslant 0$ *i* $F(t) = 1$ *dla* $t \geqslant 1$*. Na przedziale* $[0,1]$ $F(t) = at^2 + bt + c$*. Pokaż, że* F *może być dystrybuanta rozkładu tylko wtedy gdy* $c = 0$, $a + b = 1$, $a \geqslant -1$ *i* $b \geqslant 0$*.*

Zad 10 *Udowodnij, że* F_X *ma własności*

- F_X *jest niemalejące, to znaczy jeśli* $s \leqslant t$*, to* $F_X(s) \leqslant F_X(t)$*;*
- $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$*;*
- *Pokaż, że* F_X *jest prawostronnie ciągła. To znaczy* $\lim_{s\to t_+} F_X(s) = F(t)$*.*

Zad 11 *Niech* $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ *będzie kwadratem z miarą jednostajnie rozłożoną. Niech* $X(\omega)$ *będzie odległością* $\omega \in \Omega$ *od najbliższej krawędzi w kwadracie. Policz* F_X*.*

Zad 12 *Pokaż, że istnieją dwie różne zmienne losowe* X*,* X'*, które mają ten sam rozkład. To znaczy* $\mu_X = \mu_{X'}$

Zad 13 *Pokaż, że dystrybuanta* F_X *jest ciągła w punkcie* t *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{P}_X(\{t\}) = 0$*.*

Zad 14 *Wykaż, że rozkłady geometryczny i wykładniczy mają własność braku pamięci to znaczy*

$$\mathbf{P}(X > t + s | X > t) = \mathbf{P}(X > s),$$

gdzie w przypadku rozkładu geometrycznego $s, t \in \mathbb{N}$*, w przypadku wykładniczego* $s, t \in \mathbb{R}_+$*.*

Zad 15 *Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej* $Y = 3X - 5$*, jeżeli* X *ma rozkład wykładniczy z parametrem* α*.*