Seria 5. Niezależność zdarzeń

1. Niezależność zdarzeń

Definicja 1 *Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, gdy $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.*

Zad 1 *Niech Ω będzie zbiorem n elementowym, $A, B \subset \Omega$ niezależne. Pokaż, że jeśli A ma i elementów wówczas B musi mieć $j = kn(NWD(i,n))^{-1}$ elementów, gdzie $k \in \{0, 1, ..., NWD(i,n)\}$.*

Zad 2 *Niech A, B, C będą niezależne. Pokaż, że*

- *$A, B \cap C$ są niezależne;*
- *$A, B \cup C$ są niezależne;*
- *$A, B \backslash C$ są niezależne.*

Zad 3 *Kierowcy dzielą się na ostrożnych (jest ich $95/100$ i taki kierowca powoduje wypadek w ciągu roku z prawdopodobieństwem $0,01$) i piratów (jest ich $5/100$, szansa na wypadek w ciągu roku $0,5$). Wybrany losowo kierowca nie spowodował wypadku w roku 1998 ani 1999. Jaka jest szansa, że spowoduje wypadek w roku 2000?*

Zad 4 *Adam, Barnaba i Czesław strzelają do tarczy; szansa trafienia wynosi p. Wiadomo, że dwóch trafiło Wybrać właściwą odpowiedź:*

- *jest większa szansa, że Czesław;*
- *jest większa szansa, że Czesio nie trafił;*
- *szanse są równe.*

Zad 5 *Król Artur urządza turniej rycerski, w którym rycerze spotykają się systemem turniejowym. Obaj uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Wśród 2^n uczestników jest dwóch braci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że się spotkają w pojedynku?*

Zad 6 *W meczu piłki nożnej z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$ wygrają goście, $\frac{1}{2}$ gospodarze, a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ będzie remis. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w 14 meczach będzie 7 zwycięstw gospodarzy i 3 remisy.*

Zad 7 *Urna zawiera 8 kul białych i 4 czarne. Losujemy jednocześnie 2 kule. Co jest bardziej prawdopodobne: to, że obie kule będą białe, czy też to, że kule będą rożnych kolorów?*

Zad 8 *Na odcinku wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że można z nich zbudować trójkąt?*

2. Schemat Bernouliego

Schematem Bernouliego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia o dwóch możliwych wynikach, nazywanych umownie sukcesem i porażką. Poszczególne doświadczenia będziemy nazywać próbami Bernouliego.

Twierdzenie 1 *Prawdopodobieństwo zajścia dokładnie k sukcesów w schemacie Bernoulliego n prób z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p wynosi $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.*

Zad 9 *Rzucono 10 razy kostką. Jaka jest szansa otrzymania*

- *6 oczek co najmniej raz?*
- *5 oczek co najmniej raz?*

Zad 10 *Dwie osoby rzucają n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z nich otrzyma tę samą liczbę orłów?*

Zad 11 *Rzucono 10 razy kostką symetryczną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie otrzymano szóstkę, jeśli wiadomo, że*

- *otrzymano 3 szóstki*
- *w następnych 9-ciu rzutach otrzymano szóstki?*

Zad 12 *Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w ciągu n prób Bernouliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p.*

Zad 13 *Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy wielokrotnym rzucaniu parą kostek sześciennych suma oczek 8 wypadnie przed sumą oczek 7.*

Zad 14 *Rzucamy prawidłową monetą do chwili, gdy albo wyrzucimy orła, albo też wykonamy trzy rzuty. jakie jest prawdopodobieństwo, że moneta zostanie rzucona trzy razy, jeśli wiadomo, że przy pierwszym doświadczeniu wypadła reszka?*

Zad 15 *Rzucamy monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Jaka jest szansa, że gra się zakończy po parzystej liczbie rzutów?*