Seria 3. Prawdopodobieństwo warunkowe

Ciekawe zadania z prawdopodobieństwa klasycznego

Zad 1 *Student ekonomii otrzymał* 12 *razy mandat za niedozwolony postój nocny samochodu. wszystkie mandaty były wydane we wtorki lub czwartki. Znaleźć prawdopodobieństwo tego zdarzenia. (Czy warto wynajmować garaż we wtorki i czwartki?)*

Zad 2 *Z* 52 *kart wybieramy* 13 *jaka jest szansa otrzymania*

- *dokładnie siedmiu kart jednego koloru?*
- *dokładnie sześciu kart jednego koloru?*

Zad 3 *Co jest bardziej prawdopodobne: uzyskanie co najmniej jednej szóstki w* 6 *rzutach, co najmniej dwóch szóstek w* 12 *rzutach, czy trzech szóstek w* 18 *rzutach?*

Zad 4 *Jest* n *par (chłopiec i dziewczyna). Osoby rozbiegają się i losowo łączą ponownie w pary. Jaka jest szansa, że utworzone w ten sposób pary będą takie same jak na początku? Jaka jest szansa, że pary wszystkie pary będą mieszane (chłopak, dziewczyna)?*

1. Wzór podstawowy

Definicja 1 *Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia* A *pod warunkiem zajścia zdarzenia* B*, gdzie* $P(B) > 0$ *nazywamy liczbę*

$$\mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Zad 5 *Wybieramy rodzinę z dwojgiem dzieci. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierzemy rodzinę z dwoma chłopcami, jeśli wiemy, że w tej rodzinie:*

- *starsze dziecko jest chłopcem,*
- *jest co najmniej jeden chłopiec.*

Zad 6 *Udowodnij, że* $\mathbf{P}(A|B) > \mathbf{P}(A) \iff \mathbf{P}(B|A) > \mathbf{P}(B)$.

Zad 7 *Niech* $P(B) > 0$*. Udowodnić, że* $P(A|B)$ *jako funkcja* A *przy ustalonym* B *jest prawdopodobieństwem.*

Twierdzenie 1 *Jeśli zdarzenia* $A_1, ..., A_n$ *spełniają warunek*

$$\mathbf{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0,$$

to

$$\mathbf{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot ... \cdot \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}).$$

Zad 8 *Student otrzymuje losowo na egzaminie* 3 *pytania ze* 100*. Aby zdać musi odpowiedzieć na wszystkie* 3 *pytania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zda jeśli zna odpowiedzi na* 90 *pytań.*

Zad 9 *Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek?*

Zad 10 *Gracz dostał* 13 *kart z* 52*, obejrzał* 8 *i stwierdził, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że w ogóle nie ma asa?*

Zad 11 *Jaka jest szansa, że każdy z graczy* S,E,W *ma co najmniej jednego asa, jeśli wiadomo, że* N *nie ma żadnego?*

Zad 12 *Z talii* 8 *kart (*4 *króle i* 4 *asy) wybieramy losowo dwie karty. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybrano* 2 *króle jeśli wiadomo, że*

- *wybrano co najmniej jednego króla,*
- *wśród wybranych jest czarny król,*
- *wśród wybranych kart jest król pik.*

Zad 13 *Z talii* 32 *kart wyciągamy* 5*. Niech*

- A *zdarzenie polegające na wyciągnięciu dokładnie* 3 *króli,*
- B *zdarzenie polegające na wyciągnięciu co najmniej* 1 *króla,*
- C *zdarzenie polegające na wyciągnięciu czarnego króla,*
- D *zdarzenie polegające na wyciągnięciu króla pik.*

Znaleźć prawdopodobieństwa $\mathbf{P}(A|B)$, $\mathbf{P}(A|C)$, $\mathbf{P}(A|D)$.

Zad 14 *Czterej gracze dostali po* 13 *kart z* 52*. Jeden z nich zobaczył, że sąsiad posiada*

- *asa pik;*
- *jakiegoś asa czarnego koloru;*
- *jakiegoś asa.*

Jaka jest szansa, że ten gracz nie ma asa?

Zad 15 *W loterii fantowej zorganizowanej na balu szansa wygranej jest równa* p*, przegranej* q*, a z prawdopodobieństwem równym* r *wciągamy los 'graj dalej'. Los 'graj dalej' wrzucamy z powrotem do urny i dokonujemy ponownego losowania. jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?*