Seria 9. Mocne prawo wielkich liczb

Rodzaje zbieżności zmiennych losowych

Możemy wyróżnić trzy rodzaje zbieżności zmiennych losowych:

- Zbieżność prawie na pewno: $X_n \xrightarrow{p.n.} X \iff \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$
- Zbieżność według prawdopodobieństwa: $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X \iff \forall\, \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$
- Zbieżność według p-tego momentu ($p > 0$): $X_n \xrightarrow{L_p} X \iff \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n - X|^p = 0.$

Twierdzenie 1 *Zachodzą następujące relacje pomiędzy zmiennymi rodzajami zbieżności:*

- *Zbieżność* p.n. *implikuje zbieżność według* P: $X_n \xrightarrow{p.n.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X.$
- *Zbieżność według* P, *implikuje istnienie podciągu zbieżnego* p.n.: $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X \Rightarrow \exists\,(n_k)\; X_{n_k} \xrightarrow{p.n.} X.$
- *Zbieżność* L_p *implikuje zbieżność według* P: $X_n \xrightarrow{L_p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X.$
- *Zbieżność według* P *ani zbieżność* L_p *nie implikują zbieżności* p.n..
- *Bez dodatkowych założeń zbieżność* p.n. *ani zbieżność* P *nie implikują zbieżności* L_p

Twierdzenie 2 *Prawo* $0-1$ *Kołmogorowa. Jeśli zmienne losowe* X_n *są niezależne, a zdarzenie* A *jest mierzalne względem każdego* σ*-ciała ogonowego (tj.* $\sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \ldots)$*, gdzie* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$*), to* $\mathrm{P}(A) = 0$ *lub* $\mathrm{P}(A) = 1$*. W ludzkim języku oznacza to, że zdarzenie* A *zależące jedynie od dowolnie dalekich zmiennych* X_n *jest albo pewne albo niemożliwe.*

Zad 1 *Udowodnij prawo* $0-1$ *Kołmogorowa.*

Zad 2 *Pokaż, że dla ciągu zmiennych niezależnych albo z p-stwem równym* 1 *istnieje granica ciągu* $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$*, albo z p-stwem równym* 1 *ta granica nie istnieje.*

Prawa wielkich liczb

Najważniejszym twierdzeniem klasycznego rachunku prawdopodobieństwa jest

Twierdzenie 3 *Jeśli* X_n *stanowią ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (tj* $\mu_{X_1} = \mu_{X_2} = \ldots$*) o skończonej (tj.* $\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}X_2 = \ldots < \infty$*), to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \mathbf{E}X_1 \text{ p.n.}$$

Zad 3 *Niech* X_n *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Jeśli zdefiniujemy dystrybuantę empiryczną wzorem* $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \leqslant t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$*, to dla każdego* $t \in \mathbb{R}$ $F_n(t) \xrightarrow{p.n.} F_{X_1}(t)$.

Zad 4 *Chcemy sprawdzić poprawność pracy magisterskiej. Losujemy* 10 *stron ze* 100 *stronicowej pracy studenta i liczymy wszystkie błędy, które są w nich zawarte. Ustalamy, że praca jest do poprawki jeśli student popełnia błąd z prawdopodobieństwem większym lub równym* 0.1 *na stronie. Przypuśćmy, że znaleźliśmy dwa błędy, co zrobić z pracą? Ilu błędów możemy się spodziewać w całej pracy?*

Zad 5 *Przypuśćmy, że dwóch recenzentów przeczytało pracę magisterską. Jeden znalazł* 91 *błędów drugi* 53*, a błędów znalezionych wspólnie było* 39*. Następnie promotor dostał zawału. Dlaczego?*

Zad 6 *Losujemy* 1000 *liczb z przedziału* $[0, 1]$*. Ilu liczb powinniśmy się spodziewać, które na* 10 *miejscu w rozwinięciu dziesiętnym mają cyfrę zero?*

Zad 7 *Przypuśćmy, że student z p-stwem 0.8 zalicza sesję. Jeśli na III rok zakwalifikowano 200 osób, to ile musiało być studentów na II roku?*

Zad 8 *Przypuśćmy, że na zmianę rzucamy kostką na której wypada* $\{1, ..., 6\}$ *i monetą na której uzyskujemy* $\{-1, 1\}$. *Jakiej średniej sumy wyników (tj. podzielonej przez liczbę rzutów) powinniśmy się spodziewać po bardzo wielu rzutach?*

Zad 9 *Z ćwiczeń z RP studenci dostają 2 z p-stwem 0.4, 3 z p-stwem 0.3, 4 z p-stwem 0.2 i 5 z p-stwem 0.1. Mamy 30 studentów, których wyniki są niezależne. Z uzyskanych wartości wyciągamy średnią geometryczną (tj. mnożymy i podnosimy do potęgi 1/30). Jakiego wyniku możemy się spodziewać?*

Zad 10 *Dwaj studenci niezależnie rozwiązywali zadania na egzaminie z RP. Jeden rozwiązał 5 zadań drugi 8 zadań, a wspólnie rozwiązali 3. Oblicz p-stwo* p *i* q *z jakim odpowiednio pierwszy, drugi student dobrze rozwiązują pojedyncze zadanie. Jakie oceny powinniśmy im wystawić?*

Zad 11 *Obliczyć granice*

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 ... \int_0^1 \sqrt{x_1^2 + ... x_n^2}$;
- $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 ... \int_0^1 f(\frac{x_1+...+x_n}{n}) dx_1 ... dx_n$;
- $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 ... \int_0^1 f([x_1 ... x_n]^{1/n})$.

Zad 12 *Niech* $X_1, Y_1, X_2, Y_2, ...$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku* $[0, 1]$. *Niech* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *będzie funkcją mierzalna,* $Z_i = 1_{\{f(X_i) > Y_i\}}$. *Pokaż, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_n = \int_0^1 f(x)dx \ \text{ p.n.}$$

Mówimy, że ciąg zmiennych X_n spełnia MPWL jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{n} = 0, \ \text{ p.n.}, \ \ S_n = X_1 + ... X_n.$$

Mówimy, że ciąg zmiennych X_n spełnia SPWL jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{n} = 0, \ \ \mathbf{P}, \ \ S_n = X_1 + ... X_n.$$

Zad 13 *Pokaż, że jeśli* $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{D}^2 S_n}{n^2} = 0$ *lub* X_n *zmienne nieskorelowane o wspólnie ograniczonym drugim momencie, to ciąg* X_n *spełnia SPWL.*

Zad 14 *Znaleźć warunek konieczny i dostateczny, żeby ciąg niezależnych zmiennych o rozkładzie*

$$\mathbf{P}(X_n = n + 1) = \mathbf{P}(X_n = -n - 1) = p_n, \ \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p_n$$

spełniał MPWL.

Zad 15 *Niech* X_n *będą zmiennymi losowymi niezależnymi, dla których*

$$\mathbf{P}(X_n = n + 1) = \mathbf{P}(X_n = -n - 1) = \frac{1}{2(n + 1)\log(n + 1)}, \ \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{(n + 1)\log(n + 1)}.$$

Pokaż, że zmienne X_n *spełniają SPWL ale nie spełniają MPWL.*