**Seria 8. Warunkowa wartość oczekiwana**

**Zad 1** *Punkt* $(X, Y)$ *jest losowany z rozkładu jednostajnego na kole jednostkowym. Znajdź rozkład łączny* $(R, X)$, *gdzie* $R^2 = X^2 + Y^2$.

**Zad 2** *Mamy ciąg zmiennych losowych* $(X_n)$. *Pokaż, że*

1. $\exists X$ *taka, że* $X_n \overset{\text{p.n.}}{\to} X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \lim_{N\to\infty} P(\bigcap_{m,n\geqslant N} |X_n - X_m| < \epsilon) = 1$.

2. $\exists X$ *taka, że* $X_n \overset{\text{P}}{\to} X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \lim_{m,n\to\infty} P(|X_n - X_m| > \epsilon) = 0$.

**Zad 3** *Pokaż, że granica według prawdopodobieństwa jest wyznaczona jednoznacznie.*

**Zad 4** *(Twierdzenie Pratta) Niech* $X_n, Y_n, Z_n,\ X, Y, Z$ *będą takimi zmiennymi losowymi, że* $X_n \overset{\text{P}}{\to} X, Y_n \overset{\text{P}}{\to} Y, Z_n \overset{\text{P}}{\to} Z$ *oraz* $X_n \leqslant Y_n \leqslant Z_n$ *p.n. dla wszystkich* $n$. *Jeśli*

$$\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X,\ \ \mathbb{E}Z_n \to \mathbb{E}Z,\ \ \mathbb{E}|Z|, \mathbb{E}|X| < \infty,$$

*to* $\mathbb{E}Y_n \to \mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}|Y| < \infty$.

**Zad 5** *Udowodnij, że jeśli* $|X_t| \leqslant Y$ *dla* $t \in I, \mathbb{E}Y < \infty$, *to* $\{X_t\}$ *jest rodziną jednostajnie całkowalną. W szczególności skończona rodzina zmiennych losowych całkowalnych jest jednostajnie całkowalna.*

**Zad 6** *Ciąg zmiennych losowych* $(X_n)_n$ *jest zbieżny w* $L_p$, $p \geqslant 1$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. *Ciąg zmiennych* $(X_n)_n$, *jest zbieżny według prawdopodobieństwa,*

2. $(|X_n|^p)_n$ *są jednostajnie całkowalne.*

**Definicja 1** *Niech* $X$ *będzie całkowalną zmienną losową określoną na przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbf{P})$. *Niech* $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. *Mówimy, że zmienna* $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ *jest warunkową wartością oczekiwaną jeśli jest* $\mathcal{F}$ *mierzalna oraz dla każdego* $A \in \mathcal{F}$ *mamy*

$$\mathbb{E}(1_A X) = E(1_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F})).$$

**Definicja 2** *Rodzina warunkowych wartości oczekiwanych* $\mathbf{P}(A|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(1_A|\mathcal{F})$ *zwykle zadaje rozkład warunkowy. To znaczy funkcję* $\mathbf{P} : \Omega \times \mathcal{B}(R)$ *taką, że:*

1. *dla każdego* $\omega \in \Omega$ $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{F})(\omega)$ *jest rozkładem prawdopodobieństwa;*

2. *dla każdego zbioru* $A \in \mathcal{B}(R)$ *funkcja* $\mathbf{P}(A|\mathcal{F})$ *jest mierzalna na* $\Omega$.

**Twierdzenie 1** *W szczególności jeśli* $\sigma$*-ciało* $\mathcal{F}$ *jest przeliczalnie generowane (to znaczy* $\mathcal{F} = \sigma(A_1, A_2, ...)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$*) wówczas*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i} \frac{\mathbb{E}(1_{A_i} X)}{\mathbf{P}(A_i)}.$$

*Czasami stosuje się oznaczenie* $\mathbb{E}_{A_i} X = \mathbb{E}(1_{A_i} X)/\mathbf{P}(A_i)$.

**Zad 7** *Pokaż, że*

1. $\mathbb{E}(aX + bY|X) = a\mathbb{E}(Y|X) + b\mathbb{E}(Z|Y)$, $a, b \in \mathbb{R}$

2. $\mathbb{E}(Y|X) \geqslant 0$ *jeśli* $Y \geqslant 0$,

3. $\mathbb{E}(1|X) = 1$,

4. *jeśli* $X$, $Y$ *są niezależne, to* $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$,

5. $\mathbb{E}(Yg(X)|X) = g(X)\mathbb{E}(Y|X)$ *dla każdej odpowiedniej funkcji* $g$,

6. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X,Z)|X) = \mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)|X,Z))$.

**Zad 8** *Niech* $\Omega = [0,1]$ $P$*-miara Lebsgue'a na* $[0,1]$*. Znaleźć* $\mathbb{E}(f|\mathcal{F})$*, jeśli*

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathcal{F}$ *jest* $\sigma$*-ciałem generowanym przez zbiory* $[0, \frac{1}{4}), [\frac{1}{4}, 1]$.

2. $f(x) = -x$, $\mathcal{F}$ *jest* $\sigma$*-ciałem generowanym przez zbiory* $[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{3}, 1]$.

**Zad 9** *Obliczyć wartość oczekiwaną liczby prób w schemacie Bernouliego przeprowadzonych aż do momentu uzyskania kolejno:*

1. *sukcesu i porażki,*

2. *dwóch sukcesów i porażki.*

**Zad 10** *Pokaż, że zmienna losowa* $X \geqslant 0$ *o ciągłej dystrybuancie ma własność braku pamięci wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunek*

$$\mathbb{E}(X|X > t) = c + t, ;\ t \geqslant 0,$$

*gdzie* $c$ *jest pewną stałą.*

**Zad 11** *Niech* $X_1, X_2, \ldots$ *będzie ciągiem zmiennych iid, ze średnią* $\mu$*. Niech* $N$ *będzie zmienną przyjmującą wartości naturalne i niezależną od* $X_i$*. Niech* $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$*. Pokaż, że* $\mathbb{E}(S|N) = \mu N$*. Wywnioskuj stąd, że* $\mathbb{E}S = \mu\mathbb{E}N$*.*

**Zad 12** *Niech zmienne* $X$*,* $Y$ *będą niezależne z rozkładu Poissona z parametrem* $\lambda$*. Znaleźć rozkład zmiennej* $\mathbb{E}(X|X+Y)$*.*

**Zad 13** *Niech zmienne* $X$*,* $Y$ *będą niezależne z rozkładu* $\mathcal{B}(n,p)$*. Niech* $Z = X + Y$*. Pokaż, że zmienna* $\mathbb{E}(X|Z)$ *ma rozkład hipergeometryczny.*

$(*)$ *Pokaż, że*

$$D^2(Y) = \mathbb{E}(D^2(Y|X)) + D^2(\mathbb{E}(Y|X)).$$

**Zad 14** $(*)$ *Niech* $X, Y$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie* $\mathcal{N}(0,1)$*. Znajdź warunkową wartość oczekiwaną*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{N}\binom{2N}{2k}X^{2k}Y^{2N-2k}|X+Y\right).$$

**Zad 15** *Niech* $X$*,* $Y$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu* $\mathbb{N}(0,1)$*. Znajdź rozkład łączny* $(X+Y, X-Y)$*. Pokaż, że zmienne* $X+Y$*,* $X-Y$ *są niezależne.*