Seria 6. Zmienne losowe ciągłe

1. Definicja zmiennej losowej

Definicja 1 *Niech* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *będzie przestrzenią probabilistyczną. Odwzorowanie* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *nazywamy zmienną losową o wartościach w* R^n*, jeśli dla każdego* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *zbiór* $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Definicja 2 *Dystrybuantą rozkładu* μ *na* $\mathbb{R}$ *nazywamy funkcję* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadaną wzorem* $F(t) := \mu((-\infty, t])$. *Jeśli rozkład wyznaczony jest przez zmienną losową* X *dystrybuantę nazywamy* F_X.

Zad 1 *Dystrybuanta rozkładu* μ *dana jest wzorem*

$$F_\mu = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0.1 + x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < 0.5, \\ 0.4 + x & \text{dla} \quad 0.5 \leqslant x < 0.55, \\ 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 0.55. \end{cases}$$

Wyznaczyć $\mu(\frac{1}{2})$, $\mu([0, \frac{1}{2}])$, $\mu((0, 0.55))$.

Zad 2 *Przypuśćmy, że* $F(t) = 0$ *dla* $t \leqslant 0$ *i* $F(t) = 1$ *dla* $t \geqslant 1$. *Na przedziale* $[0, 1]$ $F(t) = at^2 + bt + c$. *Pokaż, że* F *może być dystrybuanta rozkładu tylko wtedy gdy* $c = 0$, $a + b = 1$, $a \geqslant -1$ *i* $b \geqslant 0$.

Zad 3 *Udowodnij, że* F_X *ma własności*

- F_X *jest niemalejące, to znaczy jeśli* $s \leqslant t$*, to* $F_X(s) \leqslant F_X(t)$;
- $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$;
- *Pokaż, że* F_X *jest prawostronnie ciągła. To znaczy* $\lim_{s\to t_+} F_X(s) = F(t)$.

Zad 4 *Niech* $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ *będzie kwadratem z miarą jednostajnie rozłożoną. Niech* $X(\omega)$ *będzie odległością* $\omega \in \Omega$ *od najbliższej krawędzi w kwadracie. Policz* F_X.

Zad 5 *Pokaż, że dystrybuanta* F_X *jest ciągła w punkcie* t *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{P}_X(\{t\}) = 0$.

2. Charakterystyki zmiennych losowych

Definicja 3 *Wartością oczekiwaną zmiennej losowej* X *nazywamy* $\mathbb{E}X := \int_\Omega X(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} x\mu_X(dx)$. *W przypadku zmiennej losowej ciągłej o gęstości* $f(x)$ *mamy* $\mathbb{E}X = \int_\mathbb{R} xf(x)dx$.

Definicja 4 *Wariancją zmiennej losowej* X *nazywamy*

$$\mathbf{V}arX = \mathbf{D}^2X := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \int_\Omega [X(\omega) - \mathbb{E}X]^2\mathbf{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} [x - \mathbb{E}X]^2\mu_X(dx)$$

W przypadku zmiennej losowej ciągłej o gęstości $f(x)$ *mamy* $\mathbf{D}^2X = \int_\mathbb{R} (x - \mathbb{E}X)^2 f(x)dx$.

Definicja 5 *Zmienne* $X_1, ..., X_n$ *określone na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *nazywamy niezależnymi jeśli*

$$\mathbf{P}(X \in B_1, ..., X \in B_n) = \mathbf{P}(X \in B_1)...\mathbf{P}(X \in B_n), \ \ \forall\, B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

W przypadku zmiennych ciągłych $X_1, ..., X_n$ *o gęstościach* $f_1, ..., f_n$*, zmienne* $X_1, ..., X_n$ *są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy zmienna* $(X_1, ..., X_n)$ *ma rozkład ciągły z gęstością*

$$f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1)...f_n(x_n), \ \ x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 1 *Dla dowolnych zmiennych* $X_1, ..., X_n$, $\mathbb{E}(X_1 + ... + X_n) = \mathbb{E}X_1 + ...\mathbb{E}X_n$. *Jeśli zmienne* $X_1, ..., X_n$ *są niezależne, to* $\mathbf{D}^2(X_1 + ... + X_n) = \mathbf{D}^2X_1 + ... + \mathbf{D}^2X_n$.

Zad 6 *Udowodnij, że* $\mathbf{D}^2X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$. *Zauważ, że* $\mathbf{D}^2X = \mathbf{D}^2(X - \mathbb{E}X)$.

Zad 7 *Niech* X *ma rozkład jednostajny* $\mathcal{U}[a,b]$ *na przedziale* $[a,b]$, *o gęstości* $g(x) = \frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x)$. *Pokaż, że* $\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}$, $\mathbf{D}^2X = \frac{(b-a)^2}{2}$.

Zad 8 *Niech zmienna* X *ma rozkład wykładniczy* $\mathcal{E}(\lambda)$ *o gęstości* $g(x) = \lambda e^{-\lambda}1_{(0,\infty)}(x)$, $\lambda > 0$. *Pokaż, że* $\mathbb{E}X = 1/\lambda$, $\mathbf{D}^2X = 1/\lambda^2$.

Zad 9 *Niech zmienna* X *ma rozkład gamma* $\gamma_{a,b}$ *o gęstości* $g(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}1_{(0,\infty)}(x)$. *Pokaż, że* $\mathbb{E}X = a/b$, $\mathbf{D}^2X = a/b^2$.

Zad 10 *Niech zmienna* X *ma rozkład gaussowski* $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ *o gęstości* $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.. *Pokaż, że* $\mathbb{E}X = m$, $\mathbf{D}^2X = \sigma^2$.

Zad 11 *Pokaż, że jeśli zmienna losowa* X *ma rozkład ciągły o gęstości* f *wówczas* $F'_X(t) = f(t)$.

Zad 12 *Znajdź dystrybuantę rozkładu geometrycznego* $\mathbf{P}(X = k) = pq^{k-1}$, *rozkładu jednostajnego* $\mathcal{U}[a,b]$ *oraz rozkładu wykładniczego* $\mathcal{E}(\lambda)$.

Zad 13 *Pokaż, że jeśli* $a, b \in \mathbb{R}$ *oraz* $Z = aX + bY$, *to zachodzi wzór* $\mathbb{E}Z = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$. *Pokaż, że jeśli* X, Y *niezależne, to* $\mathbf{D}^2Z = a^2\mathbf{D}^2X + b^2\mathbf{D}^2Y$.

Zad 14 *Rzucamy kostką tak długo, aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby rzutów.*

Zad 15 *Pokaż, że jeśli* X *jest zmienną losową o wartościach w* $\mathbb{N}$, *to* $\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(X > n)$. *Można wykazać, że jeśli* $X \geqslant 0$, *to* $\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbf{P}(X > x)d(x)$.