Seria 4. Niezależność zdarzeń

1. Niezależność zdarzeń

Definicja 1 *Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, gdy $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.*

Zad 1 *Zdarzenia $A_1, ..., A_n$ są niezależne i mają jednakowe prawdopodobieństwo p. Jaka jest szansa, że zajdzie dokładnie jedno ?*

Zad 2 *Niech Ω będzie zbiorem n elementowym, $A, B \subset \Omega$ niezależne. Pokaż, że jeśli A ma i elementów wówczas B musi mieć $j = kn(NWD(i,n))^{-1}$ elementów, gdzie $k \in \{0, 1, ..., NWD(i,n)\}$.*

Zad 3 *Kierowcy dzielą się na ostrożnych (jest ich 95% i taki kierowca powoduje wypadek w ciągu roku z prawdopodobieństwem $0,01$) i piratów (jest ich 5%, szansa na wypadek w ciągu roku $0,5$). Wybrany losowo kierowca nie spowodował wypadku w roku 1998 ani 1999. Jaka jest szansa, że spowoduje wypadek w roku 2000?*

Zad 4 *Zadanie Banacha o zapałkach. Pewien matematyk nosi w kieszeniach (lewej i prawej) po jednym pudełku zapałek. Ilekroć chce zapalić sięga po pudełko do losowo wybranej kieszeni. W pełnym pudełku jest m zapałek. Jaka jest szansa, że wyciągając po raz pierwszy puste pudełko w drugiej kieszeni będzie miał k zapałek $k = 0, 1, 2, ..., m$?*

Zad 5 *Król Artur urządza turniej rycerski, w którym rycerze spotykają się systemem turniejowym. Obaj uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Wśród 2^n uczestników jest dwóch braci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że się spotkają w pojedynku?*

Zad 6 *Znaleźć prawdopodobieństwo q_a ruiny gracza, który zaczyna grę z kapitałem a zł, a kończy gdy będzie miał c zł lub gdy się zrujnuje.*

Zad 7 *Gracz ma nieskończony kapitał i gra aż do momentu w którym wygra b zł. Znaleźć prawdopodobieństwo wygranej gracza A. Jaka jest średnia długość gry?*

Zad 8 *Mamy n urn wiemy, że r-ta urna zawiera $r-1$ kul czerwonych i $n-r$ niebieskich. Wybieramy losowo urnę, a następnie losujemy z niej bez zwracania dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że*

- *Druga kula jest niebieska.*
- *Druga kula jest niebieska jeśli pierwsza była niebieska.*

Zad 9 *Przypuśćmy, że 90% kuli pomalowano na czerwono, a pozostałe 10% na niebiesko. Wykaz, że można znaleźć sześcian wpisany w kulę o wszystkich wierzchołkach czerwonych.*

Zad 10 *Na odcinku wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że można z nich zbudować trójkąt?*

2. Schemat Bernouliego

Schematem Bernouliego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia o dwóch możliwych wynikach, nazywanych umownie sukcesem i porażką. Poszczególne doświadczenia będziemy nazywać próbami Bernouliego.

Twierdzenie 1 *Prawdopodobieństwo zajścia dokładnie k sukcesów w schemacie Bernoulliego n prób z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p wynosi $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.*

Zad 11 *Rzucono 10 razy kostką. Jaka jest szansa otrzymania*

- 6 *oczek co najmniej raz?*
- 5 *oczek co najmniej raz?*

Zad 12 *Dwie osoby rzucają n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z nich otrzyma tę samą liczbę orłów?*

Zad 13 *Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w ciągu n prób Bernouliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p.*

Zad 14 *Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy wielokrotnym rzucaniu parą kostek sześciennych suma oczek 8 wypadnie przed sumą oczek 7.*

Zad 15 *Rzucamy monetą tak długo, aż wypadną trzy orły. Jaka jest szansa, że gra się zakończy po parzystej liczbie rzutów?*

Zad 16 *Do kina ponumerowanego zbiorem $[n]$ przychodzi n-widzów. Pierwsza osoba losowo zajmuje złe miejsce. Każda następna osoba zajmuje swoje miejsce chyba, że jest zajęte. Wówczas losowo zajmuje jedno z pozostałych wolnych miejsc. Jaką szansę ma ostatnia osoba na zajęcie swojego miejsca.*

3. Lemat Borela-Canteli

Lemat 1 *Niech* $\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$, $\liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$

- *Jeśli* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, *to* $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$.
- *Jeśli zdarzenia* $A_1, A_2, ...$ *są niezależne i* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$, *to* $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$.

Zad 17 *Niech A_k będzie ciągiem liczb naturalnych podzielnych przez k. Wykazać, że nie istnieje na $\mathbb{N}$ takie p-stwo $\mathbf{P}$, że $\mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{k}$.*